Las métricas de $\mathbb{R}$ definidas por

$$d(x,y) = |x-y| \quad \textbf{y} \quad \delta(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$$

son equivalentes.

Antes de ver la demostración, dos observaciones:

1. Para demostrar que dos métricas d_1 y d_2 sobre un mismo conjunto X son equivalentes es suficiente demostrar que para todo $x \in X$ y para todo $r > 0$ ***pequeño***, existe $s_x > 0$ tal que
$$B_1(x, s_x) \subset B_2(x,r) \quad \text{y} \quad B_2(x, s_x) \subset B_1(x,r).$$
2. En $\mathbb{R}$, si x e y tienen el mismo signo entonces
$$\left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right| = \frac{|x-y|}{(1+|x|)(1+|y|)} \le |x-y|.$$

Para ver la equivalencia:

• Primeramente si $x = 0$ y $0 < r < 1$,

$$B_\delta(x,r) = \{y : \frac{|y|}{1+|y|} < r\} = \{y : |y| < \frac{r}{1-r}\}$$

por tanto $B_\delta(0, \frac{r}{1+r}) \subset B_d(0,r) \subset B_\delta(0,r)$;

• Si $x \neq 0$, sin pérdida de generalidad se supone que $x > 0$. Dado un $r > 0$, si $r < |x|$ e $y \in B_d(x,r)$ entonces $\delta(x,y) \le d(x,y)$ por tanto $B_d(x,r) \subset B_\delta(x,r)$.

Para obtener la relación contraria hay que separar el caso x grande del caso x pequeño. Al hacer los cálculos se ve que la división debe ser un número entre 1 y 2. Tómese $\frac{3}{2}$.

Si $0 < x \le \frac{3}{2}$ se parte de

$$r < \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x} \quad \text{y de} \quad \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right| < r,$$

resulta que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+|y|} < \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{1+x}$$

y por tanto $0 < y < 6x$. Entonces

$$|x-y| \le (1+x)(1+6x)\frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} = (1+x)(1+6x)\left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right|.$$

Si $x > \frac{3}{2}$, se parte de $r < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x}$, entonces

$$\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \quad < \quad \frac{y}{1+|y|} \quad < \quad \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x}$$

y de nuevo $0 < y$; además $1 + y > 2 + 2x$, entonces

$$|x - y| \leq (1 + x)(2 + 2x)\left|\frac{x - y}{(1 + x)(1 + y)}\right| = (1 + x)(2 + 2x)\left|\frac{x}{1 + x} - \frac{y}{1 + y}\right|.$$

Así, en ambos casos existe $c_x > 0$ tal que

$$\left|\frac{x}{1 + x} - \frac{y}{1 + y}\right| < r$$

implica $|x - y| < c_x r$, por tanto

$$B_\delta\left(x, \frac{r}{c_x}\right) \subset B_d(x, r)$$

siempre que se parta de $r > 0$ suficientemente pequeño.

Una forma diferente de demostrar la equivalencia es a través del teorema del punto medio del cálculo diferencial. Se considera la aplicación

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & (-1{,}1) \\ x & \mapsto & x' = \frac{x}{1+|x|} \end{array}$$

que tiene por inversa

$$g : \begin{array}{ccc} (-1{,}1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x' & \mapsto & x = \frac{x'}{1-|x'|} \end{array}$$

Ambas, f y g, son derivables (además, con derivada continua) por tanto

$$|x - y| = \left|\frac{x'}{1 - |x'|} - \frac{y'}{1 - |y'|}\right| \leq \sup |g'(\xi')||x' - y'|$$

Resulta que

$$g'(\xi') = \frac{1}{(1 - |\xi'|)^2} = \frac{1}{\left(1 - \left|\frac{\xi}{1+|\xi|}\right|\right)^2} = (1 + |\xi|)^2$$

por tanto

$$|x - y| \leq \sup\{(1 + |\xi|)^2\}\left|\frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|}\right|$$

donde el sup se toma sobre los valores de ξ entre x e y.

Así, sy $y \in B_d(x, r)$ con $x > 0$ y $0 < r < \frac{x}{2}$ entonces $\frac{1}{2} \cdot x < y < \frac{3}{2} \cdot x$ por tanto

$$|x - y| \leq \left(1 + \frac{3}{2} \cdot x\right)^2 \left|\frac{x}{1 + x} - \frac{y}{1 + y}\right|.$$

Entonces, si

$$\left|\frac{x}{1 + x} - \frac{y}{1 + y}\right| < \frac{r}{\left(1 + \frac{3}{2} \cdot x\right)^2}$$

se tiene que $|x - y| < r$.