12. CONEXIÓN

71. i) Demuestra que un espacio X es conexo si y sólo si no existe ninguna aplicación continua y sobreyectiva $f : X \longrightarrow Y$ donde $Y = \{0, 1\}$ con la topología discreta.

ii) Usa el apartado anterior para probar que si S es un subconjunto conexo de un espacio X y K satisface $S \subset K \subset \overline{S}$ entonces K es conexo.

72. i) Sean $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n$ subconjuntos conexos de un espacio topológico tales que $\mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1} \neq \varnothing$ para todo $1 \le k < n$. Prueba que $\bigcup_{k=1}^{n} \mathsf{A}_k$ es conexo. Generaliza el resultado para una colección numerable de conexos.

ii) Sean A y A_α, $\alpha \in I$, conjuntos conexos de un espacio topológico X, con la propiedad de que $\mathsf{A}_\alpha \cap A \neq \varnothing$ para todo $\alpha \in I$. Demuestra que $(\cup_{\alpha \in I} \mathsf{A}_\alpha) \cup \mathsf{A}$ también es conexo.

73. i) Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Demuestra que la gráfica de una función continua $f : I \to \mathbb{R}$ es un subconjunto conexo del plano.

ii) Para $\alpha \in I$, sean $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas que toman valores tanto positivos como negativos en $\mathbb{R}$ y sea F la función idénticamente nula en $\mathbb{R}$. Prueba que la unión de las gráficas de F y de las f_α es un subconjunto conexo del plano. ¿Se sigue la misma conclusión si no incluimos en la unión la gráfica de F?

74. i) Prueba que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo entonces, para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in X$, $X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $Y \setminus \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ también son homeomorfos.

ii) Aplica lo anterior para demostrar que $(1, 2)$, $[1, 2]$ y $[1, 2)$ no son subconjuntos homeomorfos de $\mathbb{R}$.

iii) Demuestra que un intervalo abierto y un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ no pueden ser homeomorfos.

75. Estudia si $X = [0, 1] \times [0, 1]$ es conexo con:

i) La topología del orden lexicográfico en X.

ii) La topología heredada de $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico.

76. i) Demuestra que si X e Y son conexos y A, B son subconjuntos propios no vacíos de X e Y respectivamente entonces $X \times Y \setminus \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ es conexo.

ii) En la situación anterior, ¿es cierto que si X e Y son conexos por caminos entonces $X \times Y \setminus \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ también lo es?

77. i) Caracteriza todos los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ con la topología cofinita.

ii) Demuestra que las componentes conexas de $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey son los puntos.

78. i) Demuestra que si A es numerable entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \mathsf{A}$ es conexo por caminos. Indicación: El conjunto de rectas que pasan por un punto no es numerable.

ii) Demuestra que todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ con más de un punto es no numerable.

79. Demuestra que $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}$. ¿Son $\mathbb{R}^1$ y $\mathbb{R}^2$ homeomorfos?

80. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) Si X es conexo por caminos y $\exists f : X \to Y$ continua y suprayectiva entonces Y también es conexo por caminos.

ii) Si A es un conexo por caminos de un espacio topológico X y $\mathsf{A} \subset \mathsf{D} \subset \overline{\mathsf{A}}$ entonces D es conexo por caminos.

iii) Si una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios en cualquier intervalo, entonces es necesariamente continua.

13. Compacidad

81. Estudia si los siguientes conjuntos son compactos en los espacios que se indican.

i) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

ii) $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con la topología del límite inferior $\mathcal{T}_{[\,)}$.

iii) $[0,1] \times \{3\} \subset \mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico.

82. Si un espacio es compacto con cierta topología, ¿lo será con una menos fina? ¿Y con una más fina?

83. Halla un recubrimiento de $[0,1)$ por intervalos abiertos que no admita subrecubrimiento finito.

84. Demuestra que si $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de bolas cerradas encajadas de $\mathbb{R}^n$ (es decir, $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$), entonces $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_j \neq \varnothing$.

85. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) La unión finita de subconjuntos compactos de un espacio es un subconjunto compacto.

ii) La unión de una familia cualquiera de compactos de un espacio es un subconjunto compacto.

iii) La intersección de una familia de compactos de un espacio de Hausdorff es un subconjunto compacto.

86. Decide cuáles son los subconjuntos compactos en $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, con la topología de los complementos numerables y, finalmente, con la topología discreta.

87. Demuestra que los conjuntos compactos en la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ son necesariamente numerables.
Indicación: Prueba primero que en un conjunto no numerable existe siempre una sucesión estrictamente creciente.

88. Consideremos los conjuntos $[0,1] \times [0,1]$ y $[0,1) \times [0,1]$.

i) ¿Son espacios compactos con la topología del orden lexicográfico?

ii) ¿Son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico?

89. i) Demuestra que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{S}^2$ no son homeomorfos.

ii) Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 = y^2,\ x,y \in [-1,1]\}$, con la topología usual. ¿Existe alguna función continua y suprayectiva de X en $\mathbb{R}$?

90. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Prueba que la función distancia está acotada.

91. Demuestra que si X es compacto, Y es Hausdorff y $f : X \to Y$ es continua entonces f es cerrada. Concluye que si f es además biyectiva, entonces es un homeomorfismo.

92. Demuestra que si Y es compacto entonces $\pi_1 : X \times Y \to X$ es cerrada. Da un ejemplo de un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^2$ cuyas proyecciones sean compactas. Indicación: Si A es cerrado y $x \notin \pi_1(A)$, hallamos un «tubo» $T = U_x \times Y$ tal que $T \cap A = \varnothing$.