Ejercicios de Topología, UAM 2018-19

1. Espacios métricos. Bolas y esferas

1. Estudia si $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico, donde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |x| + |y| & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Dibuja la bola $B(x,r)$ cuando **i)** $x = 0$ y $r = 1/2$; **ii)** $x = 1/2$ y $r = 1$.

2. Demuestra que si d es una distancia entonces $d'(x,y) = \min(d(x,y), 1)$ también lo es.

3. Decide razonadamente si

i) $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ define una métrica en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

ii) $d(x,y) = |x^2 - y^2|$ define una métrica en $\mathbb{R}$.

4. Demuestra la *desigualdad triangular inversa*: en un espacio métrico (X, d),

$$\forall x, y, z \in X, \quad |d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$

5. Dado un conjunto no vacío, sea $\mathcal{F}$ la colección de todos sus subconjuntos finitos. Para $A \in \mathcal{F}$, sea $|A|$ el número de elementos de A.

i) Comprueba que

$$d(A,B) = |A \Delta B| = |(A \setminus B) \cup (B \setminus A)|$$

define una métrica en $\mathcal{F}$.

ii) Sea $\mathcal{F}$, concretamente, la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Para la métrica descrita en el apartado anterior y el punto $A = \{1, 2\}$ en el espacio $\mathcal{F}$, describe la esfera $S(A, 1) = \{B \in \mathcal{F} : \ d(A,B) = 1\}$.

6. Comprueba que los siguientes espacios de sucesiones con las distancias asociadas son espacios métricos:

i) $\mathbb{R}^\omega$ es el espacio de sucesiones de números reales $x = (x_n)$, y $d : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ la distancia

$$d(x,y) \ = \sum_n \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)} \qquad x \in \mathbb{R}^\omega, \quad y \in \mathbb{R}^\omega$$

¿Cuál es la distancia entre las sucesiones $x = (x_n) = ((1 - 2^{-n})^{-1})$ e $y = (y_n) = (1)$?

ii) ℓ_∞ es el espacio de todas las sucesiones acotadas de números reales, y $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}$ la función

$$d(x,y) \ = \ \sup\{|x_n - y_n|, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

iii) ℓ_2 es el espacio de todas las sucesiones $x = (x_n)$ de $\mathbb{R}$ tales que $\sum_n x_n^2 < \infty$; y $d : \ell_2 \times \ell_2 \to \mathbb{R}$ la función

$$d(x,y) \ = \ \left(\sum_n |x_n - y_n|^2\right)^{1/2}$$

Indicación: Si $x = (x_n) \in \ell_2$, $y = (y_n) \in \ell_2$, entonces $\sum |x_n y_n|$ converge y, además, $(\sum |x_n y_n|)^2 \leq (\sum x_n^2)(\sum y_n^2)$.

7. Si (X, d) es un espacio métrico y D la función definida en $(X \times X) \times (X \times X)$ por

$$D((x_1, x_2), (x_1', x_2')) = d(x_1, x_1') + d(x_2, x_2'),$$

comprueba que D es una métrica. Demuestra que la función distancia $d\colon (X \times X, D) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es continua.

8. En $\mathbb{R}^n$ se define $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$ donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Demuestra que d_1 es una distancia en $\mathbb{R}^n$. Si d_2 es la distancia usual (euclídea) de $\mathbb{R}^n$ demuestra que

$$\forall r > 0, \exists r' > 0 \,|\, \forall x \in \mathbb{R}^n, B_1(x, r') \subset B_2(x,r) \text{ and } B_2(x, r') \subset B_1(x,r)$$

donde B_i denota la bola abierta definida por la distancia d_i $(i = 1, 2)$.

2. Interior, adherencia, frontera y derivado en espacios métricos

9. ¿Es cierto que en cada espacio métrico, el cierre de la bola abierta $B(a,r)$ es la bola cerrada $\overline{B}(a,r)$?

10. Se considera el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$\mathsf{A} = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left[\sqrt{2}, 3\right) \cup \left\{\frac{3n+10}{n+3} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}.$$

Halla $\mathring{\mathsf{A}}$, $\overline{\mathsf{A}}$ y A' en las siguientes métricas sobre $\mathbb{R}$:

i) La usual.

ii) La discreta.

iii) La métrica dada por la fórmula $d(x,y) = \text{mín}\{|x-y|, 1\}$.

Indicación: Conviene comparar los conjuntos abiertos en esta métrica con los la usual.

11. Halla un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ que, con la métrica usual de $\mathbb{R}$, tenga como frontera el conjunto dado:

$\partial\,\mathsf{A} = [1,2] \cup \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

12. Para cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, se pide hallar su frontera y decidir si es abierto o cerrado.

$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 4\right\}, \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 3\right\}.$

13. Determina los conjuntos A' y $\overline{A}$ para $A = \{(0,2)\} \cup ([0,1] \times [0,1)) \subset \mathbb{R}^2$.

14. Sea $U \subset \mathbb{R}^N$ conjunto abierto y $A \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto tal que $U \subset A$. Demuestra que $U \subset \mathring{A}$. Enuncia y demuestra la afirmación análoga para conjuntos cerrados.

15. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dotado de la métrica euclídea. Sea x un punto de acumulación de $A \bigcup B$. ¿Se puede concluir que x es un punto de acumulación de A o de B?

16. Sea (X,d) un espacio métrico. Demuestra que si A es un subconjunto finito de X, entonces A no tiene puntos de acumulación; es decir $\mathsf{A}' = \varnothing$.

17. Si (X,d) es un espacio métrico, $A \subset X$ y $a \in X$, se define $d(a,A) = \text{ínf}\,\{d(a,x) :\ x \in A\}$.

i) Demuestra que $d(a,A) = 0$ si y sólo si $a \in \overline{A}$.

ii) Para $\alpha \in \mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$, definamos $B_\alpha(A) = \{x \in X : d(x,A) < \alpha\}$. Prueba que $\forall \alpha > 0, \beta > 0$ se cumple la inclusión

$$B_\alpha(B_\beta(A)) \subset B_{\alpha+\beta}(A)$$

pero que la igualdad no es necesariamente cierta.

3. Convergencia de sucesiones y funciones continuas en espacios métricos

18. Si en un espacio métrico (X,d) se cumple que $x_n \to x$, $y_n \to y$ cuando $n \to \infty$, demuestra que entonces $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$.

19. Sean X e Y dos espacios métricos y $f,g :\ X \to Y$ dos funciones continuas.

i) Demuestra que $\{x \in X :\ f(x) = g(x)\}$ es un subonjunto cerrado de Y.

ii) Si, además, $A \subset X$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, demuestra que, de hecho, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \overline{A}$. (Se recomienda hacerlo de dos maneras distintas: directamente por sucesiones y deduciéndolo del apartado anterior.)

20. Sea (X,d) un espacio métrico y $a \in X$. Demuestra que la función $f :\ X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x,a)$ es continua (y, de hecho, uniformemente continua).

21. Demuestra que $d(x,y) = \text{mín}(|x-y|, 1-|x-y|)$ define una distancia en $[0,1)$. ¿Cuáles son las funciones $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ continuas en este espacio?