Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias y X una variable aleatoria con función de distribución F. Se dice que X_n converge a X,

- en **media cuadrática** si $\mathbf{E}(|X_n - X|^2) \to 0$ cuando $n \to \infty$;
- en **probabilidad** si, para todo $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$ cuando $n \to \infty$;
- en **distribución** si, para todo t que sea punto de continuidad de F, $\mathbf{P}(X_n \leq t) \to F$ cuando $n \to \infty$.

1. Supongamos que la sucesión de variables aleatorias Z_n converge a la variable aleatoria Z en probabilidad (o en distribución). Sean a y b números reales. Comprueba que la sucesión $aZ_n + b$ converge en probabilidad (respectivamente, en distribución) a $aZ + b$.
Comprueba que si $X_n \to X$ e $Y_n \to Y$ en probabilidad, entonces $X_n + Y_n \to X + Y$ en probabilidad. ¿Ocurre lo mismo para la convergencia en distribución?

2. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, y sea $Z_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Demuestra que

a) $Z_n \longrightarrow 1$ en probabilidad, cuando $n \to \infty$,

b) Si $U_n = n\,(1 - Z_n)$, entonces $\mathbf{P}\,(U_n \leq x) \longrightarrow \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{si } x > 0\,, \\ 0, & \text{si } x \leq 0\,; \end{cases}$ de manera que U_n converge en distribución a una exponencial con parámetro 1.

3. Para cada n, sea X_n una binomial de parámetros n y p, con p fijo. Demuestra que X_n/n converge a p en probabilidad cuando $n \to \infty$.

4. Da un ejemplo de una sucesión de variables X_n tales que $X_n \to X$ en probabilidad, pero donde $\mathbf{E}(X_n)$ no converge a $\mathbf{E}(X)$.
Demuestra que lo anterior no es posible si existe una constante M tal que $\forall n, |X_n| \leq M$.
Demuestra que X_n tiende a 0 en probabilidad si y sólo si $\mathbf{E}\left(\dfrac{|X_n|}{1 + |X_n|}\right) \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.
Demuestra que si una sucesin de variables aleatorias X_n converge en distribución hacia una constante, entonces también converge en probabilidad.

5. Supongamos que $X_1, X_2, \ldots$ es una sucesión de variables aleatorias independientes (no suponemos que tienen la misma distribución). Llamemos $m_k = \mathbf{E}(X_k)$ y $\sigma_k^2 = \mathbf{V}(X_k)$. Supongamos que hay una constante R tal que $\sigma_k^2 < R$ y denotemos por

$$M_n = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n}\,.$$

Demuestra que, para cualquier ε,

$$\mathbf{P}\left(\left|\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) - M_n\right| < \varepsilon\right) \longrightarrow 1 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

6. Sea Z una variable normal estándar. Calcula $\mathbf{E}(Z^2)$ y $\mathbf{E}(Z^4)$. Sea $Y = Z^2$. Halla la función de densidad de Y, su media y su varianza.

Sea ahora $Z_1, Z_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias normales estándar independientes. Para cada natural n, definamos la variable S_n: $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i^2$.

- Utiliza el teorema central del límite para comprobar que $\mathbf{P}\left(S_n \leq n + k\sqrt{(2n)}\right)$ converge a un cierto límite, para cada k fijo, cuando $n \to \infty$.
- Demuestra que, para todo c fijo, $\mathbf{P}\,(S_n \leq c)$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

7. Sea S el número de caras que se obtienen al lanzar una moneda regular un millón de veces. Utiliza la desigualdad de Chebychev y el Teorema Central del Límite para estimar:

- la probabilidad de que S quede entre 499.500 y 500.500,
- la probabilidad de que S quede entre 498.000 y 502.000.

8. En una encuesta se supone que una proporción p (desconocida) de gente en una población están a favor de una determinada nueva ley y que, consecuentemente, una proporción $1-p$ están en contra. Se toma una muestra (elegidos independientemente unos de otros) de tamaño n. Utiliza el Teorema Central del Límite para determinar qué tamaño n debe tener la muestra para que la estimación (a partir de la muestra) de la proporción p tenga, con probabilidad de un 95 %, un error de a lo sumo 0,01.

9. Elegimos, de manera independiente, N números al azar en el intervalo $[0,1]$ (al azar quiere decir con distribución uniforme, y N será muy grande). Ahora calculamos la media aritmética de los *cuadrados* de estos N números: ¿qué esperamos obtener?

Explica con detalle el sentido de tu respuesta, enunciando el resultado que la justifique.