1. Se sacan «al azar» dos cartas de un mazo de 40 cartas. Denotamos por X el número de ases que se obtienen e Y el número de reyes. Calcula la función de masa conjunta de X e Y.

2. Un par de variables aleatorias X e Y tiene función de masa conjunta (dependiente de dos parámetros, c y θ)

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = c^2\theta^{i+j}, \text{ para } i, j = 0, 1, 2\,; (0, \text{ en otro caso})$$

a. Demuestra que se cumple la ecuación $(1 + \theta + \theta^2)c = 1$.
b. Halla las funciones marginales de masa y comprueba que X e Y son independientes.
c. Demuestra que $\mathbf{E}[X] = (\theta + 2\theta^2)c$ y halla su valor si $\theta = \frac{1}{2}$.

3. Da un ejemplo de dos variables aleatorias discretas X e Y que cumplen que $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$, pero que **no** sean independientes. Demuestra que, sin embargo, si X e Y toman sólo dos valores, entonces X e Y son independientes si y sólo si $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

4. La función de masa conjunta de dos variables X e Y, viene dada por la siguiente matriz:

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = 0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
$Y = 1$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Comprueba que X e Y no son independientes y que, sin embargo, X^2 e Y^2 son independientes.

5. Si X e Y son dos variables aleatorias, definimos su **covarianza** como

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}(X))\,(Y - \mathbf{E}(Y))\right].$$

Demuestra que **a.** $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) + \mathbf{Cov}(X, Y)$. **b.** $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\,\mathbf{Cov}(X, Y)$.

c. $\mathbf{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathbf{Cov}(X, Y)$.

6. A veces es mejor manejar una versión de la covarianza que no tenga dimensiones: el **coeficiente de correlación** de X e Y se define como

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\,\mathbf{V}(Y)}}\,.$$

Demuestra que
a. $-1 \le \rho(X, Y) \le 1$ (Sugerencia: desigualdad de Cauchy-Schwarz).
b. $|\rho(X, Y)| = 1$ si y sólo si $\mathbf{P}(X = aY + b) = 1$ para ciertas constantes $a \ne 0$ y b.
c. Si X e Y son independientes, entonces $\rho(X, Y) = 0$. Pero no al revés, en general. Esto es, puede que X e Y sean **incorreladas** ($\rho(X, Y) = 0$) y, sin embargo, no sean independientes (como sugiere el ejercicio **3**).
d. $\rho(aX + b, cY + d) = \text{signo}(ac)\,\rho(X, Y)$.

7. a. Sean X e Y variables aleatorias independientes. ¿Podemos deducir que $X + Y$ y $X - Y$ son también independientes?
b. Supongamos ahora que X e Y son variables aleatorias con la misma varianza, σ^2. ¿Qué podemos decir sobre la correlación de $X + Y$ y $X - Y$?

8. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias incorreladas, todas ellas con varianza σ^2. Definimos, para cada $n \ge 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Comprueba que

$$\mathbf{V}(S_n) = n\,\sigma^2 \quad \text{y que} \quad \mathbf{Cov}(S_n, S_m) = \text{mín}(n, m)\,\sigma^2.$$

9. Sea X e Y variables aleatorias discretas independientes con función de densidad

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = p \cdot q^k, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $0 < p = 1 - q < 1$. Demuestra que

$$\mathbf{P}(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n + 1}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

10. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias discretas independientes, todas con distribución

$$\mathbf{P}(X_i = k) = \frac{1}{N}, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, N\,.$$

Halla las distribuciones de las variables $U_n = \text{mín}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ y $V_n = \text{máx}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ así como sus esperanzas.

11. Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes ambas con distribución geométrica de parámetros respectivos p y r. Demuestra que la variable $U = \min\{X, Y\}$ sigue una distribución geométrica con parámetro $p + r - pr$.

12. Distribuimos "al azar" N bolas en M cajas (pueden caer varias bolas en una caja). Demuestra que el número medio de cajas que quedan vacías es:

$$\frac{(M-1)^N}{M^{(N-1)}}$$

Sugerencia: utilizar funciones indicatrices.

13. Supongamos que la variable aleatoria X toma los valores $\{0, 1, 2, \dots\}$ con probabilidades $p_0, p_1, p_2, \dots$. Los números p_j son ≥ 0 y suman 1. Definimos la función generatriz de probabilidad (f.g.p.) de la variable aleatoria X como

$$G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, s^n,$$

al menos para los valores de s en los que la serie de la derecha converja.

a. Comprueba que, con seguridad, la serie de potencias converge para $|s| < 1$.

b. Comprueba que

$$\begin{array}{lcl||lcl} X \sim \mathrm{Ber}(p) & \Longrightarrow & G_X(s) = (1-p) + ps & X \sim \mathrm{Bin}(n,p) & \Longrightarrow & G_X(s) = \big[(1-p) + ps\big]^n \\ X \sim \mathrm{Pois}(\lambda) & \Longrightarrow & G_X(s) = e^{\lambda(s-1)} & X \sim \mathrm{Geom}(p) & \Longrightarrow & G_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)\,s} \end{array}$$

Visto esto, ¿ cuál es la f.g.p. asociada a una variable aleatoria que siga una $\mathrm{BinNeg}(n, p)$?

14. Algunas de las funciones generatrices del ejercicio anterior son polinomios, otras convergen para todo valor de s, etc. Se requiere un pequeño argumento técnico para comprobar que siempre tiene sentido evaluar la función (y sus derivadas) en $s = 1$, para obtener, por ejemplo, que

$$G_X(1) \equiv \lim_{s\uparrow 1} G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \qquad \text{y que} \qquad G'_X(1) \equiv \lim_{s\uparrow 1} G'_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, p_n.$$

Observa que la primera serie vale 1, y que la segunda es $\mathbf{E}(X)$. Comprueba que la varianza se puede escribir como

$$\mathbf{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1)\,\big[1 - G'_X(1)\big].$$

Aplica estas observaciones (y las expresiones explícitas para las f.g.p. del ejercicio anterior) al cálculo de medias y varianzas de variables aleatorias que sigan estas distribuciones: $\mathrm{Ber}(p)$, $\mathrm{Bin}(n, p)$, $\mathrm{Pois}(\lambda)$, $\mathrm{Geom}(p)$ y $\mathrm{BinNeg}(n, p)$.

15. Sea X una variable aleatoria con valores en $\{0, 1, 2, \dots\}$ y f.g.p. $G_X(s)$. Definimos la función

$$H_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > n)\, s^n.$$

Observa que no tiene por qué ser una f.g.p.: sus coeficientes no suman necesariamente 1 (pregunta: ¿cuánto suman?). Comprobar que

$$(1 - s)H_X(s) = 1 - G_X(s)\,.$$

16. Sean X e Y variables aleatorias independientes que siguen distribuciones de Poisson, con parámetros λ y μ, respectivamente. Demuestra que $X + Y$ es también una variable de Poisson con parámetro $\lambda + \mu$. Da un ejemplo para comprobar que la conclusión **no** es cierta si X e Y no son independientes.

17. Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes que siguen distribuciones binomiales con parámetros respectivos (n, p) y (m, p). Demuestra que $X + Y$ es también una variable binomial (con parámetros $(n + m, p)$).

18. Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión de variables aleatorias discretas todas con media μ. Sea además N una variable aleatoria independiente de todas las X's, y que toma valores en $\{1, 2, 3, \dots\}$. Demuestra, condicionando por los valores de N, que

$$\mathbf{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_N) = \mu \cdot \mathbf{E}(N)$$

19. Tenemos una moneda en la que aparece cara con una probabilidad p. Lanzamos la moneda un número aleatorio N de veces, donde N tiene una distribución de Poisson con parámetro λ y es independiente de los resultados de los lanzamientos. Denotamos por X la variable que cuenta el número de caras y por Y la que cuenta el número de cruces. Demuestra que X e Y son variables de Poisson **independientes** con parámetros respectivos λp y $\lambda(1 - p)$.

Sugerencia: demuestra, de paso, que si $\mathbf{P}(X = j, Y = k) = a_j b_k$ para cualesquiera números a_j, b_k, entonces X e Y son independientes.