

**Probabilidad I**  
**Segundo de Matemáticas**

**Examen de febrero, 6-2-2003**

**1.** (a) El avión  $A$  tiene dos motores que funcionan independientemente. El avión es capaz de volar con un único motor. El motor izquierdo funciona, antes de estropearse,  $X_1$  horas, donde  $X_1$  es una variable aleatoria que sigue una exponencial de parámetro  $\lambda = 1/10$ . El motor derecho dura  $X_2$  horas, donde  $X_2$  es también una variable aleatoria exponencial de parámetro  $\lambda = 1/10$ . ¿Cuál es la probabilidad de que el avión se mantenga en vuelo al menos 10 horas?

(b) Un nuevo prototipo de avión  $B$  funciona con un único motor. Pero, por si acaso, dispone de uno de reserva que se pone en marcha en cuanto el primero falla. El primer motor funciona  $X_1$  horas, mientras que el de reserva,  $X_2$  horas. Ambas variables son exponenciales de parámetro  $\lambda = 1/10$ . ¿Cuál es la probabilidad de que el avión  $B$  se mantenga en el aire tras 10 horas?

**2.** (a) Vamos a jugar al siguiente juego. Tenemos dos cofres con joyas: el primero contiene cinco rubíes y dos diamantes, mientras que en el segundo hay un único rubí, junto a diez diamantes. Nos acercamos a ellos con los ojos vendados y extraemos una joya al azar de uno de los cofres. ¿Con qué probabilidad la joya extraída será un diamante?

(b) Ya hemos realizado el experimento y hemos extraído un diamante. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido extraído del segundo cofre?

**3.** La altura (en centímetros) de los individuos de una población es una variable aleatoria  $X$  de media 180 y varianza 49.

(a) Vamos a escoger una persona al azar y vamos a medir su altura. Utilizando la desigualdad de Chebyshev, estima la probabilidad de que obtengamos una medida entre 170 y 190.

(b) Ahora vamos a escoger una muestra de 100 personas, de las que anotaremos sus respectivas alturas. ¿Qué podrías decir ahora sobre la probabilidad de que la *altura media* en esa muestra esté entre 178 y 182?

**4.** Elegimos, de manera independiente,  $N$  números al azar en el intervalo  $[0, 1]$  (al azar quiere decir con distribución uniforme, y  $N$  será muy grande). Ahora calculamos la media aritmética de los *cuadrados* de estos  $N$  números: ¿qué esperamos obtener?

Explica con detalle el sentido de tu respuesta, enunciando el resultado que la justifique.

**5.** Lanzamos una moneda (con probabilidad  $p$  de obtener cara) hasta que obtenemos, completo, el patrón  $CCC$ . Llamemos  $T$  al (número del) lanzamiento en el que el juego se para, es decir, en el que hemos completado el patrón. ¿Cuánto vale  $\mathbf{E}(T)$ ?

*Sugerencia.* Condicionar a la siguiente partición: sale  $X$  en la primera, o bien sale  $CX$  en las dos primeras, o bien  $CCX$  en las tres primeras, o bien sale  $CCC$  en las tres primeras.

---

**Notas y comentarios:**

- La media de tipo cuadrático a la que nos referimos en el ejercicio 4 es la siguiente: dada una lista de números  $x_1, \dots, x_N$ , interesa considerar

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j^2.$$

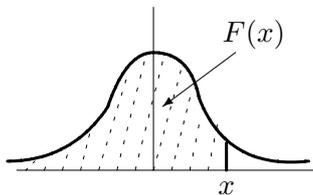
- Una variable  $X$  sigue una distribución exponencial de parámetro  $\lambda > 0$  si sus funciones de distribución y de densidad son, respectivamente,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0; \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0; \end{cases} \quad \text{y} \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Una variable aleatoria  $X$  con distribución uniforme en el intervalo  $[0, a]$  tiene como funciones de distribución y densidad a

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ x/a & \text{si } 0 \leq x \leq a; \\ 1 & \text{si } x > a; \end{cases} \quad \text{y} \quad f_X(x) = \begin{cases} 1/a & \text{si } 0 < x < a; \\ 0 & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

- Algunos valores de la función de distribución de una variable aleatoria normal de media 0 y varianza 1:



$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
<b>0,0</b>	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
<b>0,1</b>	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
<b>0,2</b>	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
<b>0,3</b>	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
<b>0,4</b>	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
<b>0,5</b>	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
<b>0,6</b>	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
<b>0,7</b>	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
<b>0,8</b>	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
<b>0,9</b>	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
<b>1,0</b>	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
<b>1,1</b>	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
<b>1,2</b>	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
<b>1,3</b>	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
<b>1,4</b>	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
<b>1,5</b>	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
<b>1,6</b>	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
<b>1,7</b>	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
<b>1,8</b>	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
<b>1,9</b>	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
<b>2,0</b>	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
<b>2,1</b>	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
<b>2,2</b>	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
<b>2,3</b>	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
<b>2,4</b>	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
<b>2,5</b>	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
<b>2,6</b>	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
<b>2,7</b>	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
<b>2,8</b>	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
<b>2,9</b>	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
<b>3,0</b>	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990