1.- Expresa cada uno de los siguientes eventos en términos de los sucesos A, B y C, y de las operaciones de unión, intersección y complementación:

(a) Ocurre por lo menos, uno de los eventos A, B, C.
(b) Ocurre como máximo uno de los eventos A, B, C.
(c) Ninguno de los eventos A, B, C ocurre.
(d) Todos los eventos A, B, C ocurren.
(e) Ocurre exactamente uno de los eventos A, B, C.
(f) Los eventos A y B ocurren, pero C no.
(g) Ocurre A o si no, entonces tampoco ocurre B.
(h) Ocurren exactamente dos de los tres sucesos.

Dibuja los diagramas de Venn correspondientes.

2.- Sea Ω un espacio muestral.

(a) Dado $A \subset \Omega$, demuestra que el **mínimo** espacio de sucesos al que A pertenece es $\{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$.

(b) Dados $A, B \subset \Omega$ **distintos** demuestra que existe un mínimo espacio de sucesos del que A, B son elementos y estudia cuántos elementos tendrá este espacio.

(c) Dados $A_1, A_2, \cdots \subset \Omega$ demuestra que existe un mínimo espacio de sucesos que los contiene.

(d) ¿Puede haber un espacio de sucesos con exactamente 17 elementos?

3.- Halla $P(A \cup (B^c \cup C^c)^c)$ en cada uno de los casos siguientes:

(a) A, B, y C son eventos mutuamente exclusivos y $P(A) = 3/7$.

(b) $P(A) = 1/2$, $P(B \cap C) = 1/3$, $P(A \cap C) = 0$.

(c) $P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) = 0'65$.

4.- Alberto y Benito tienen sendas barajas españolas (de 40 cartas). Cada uno saca de su baraja una carta al azar. Halla:

(a) La probabilidad de obtener al menos un as.

(b) La probabilidad de obtener dos cartas del mismo palo.

(c) La probabilidad de no obtener ningún as.

(d) La probabilidad de no obtener ni una copa ni una espada.

5.- Zoilo tiene un dado trucado con 6 caras numeradas del 1 al 6. La probabilidad de cada cara es proporcional al número de puntos en ella. Halla la probabilidad de que Zenón obtenga con ese dado un número par.

6.- Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad. Demostrar las siguientes afirmaciones (en las que A, B y $A_1, \ldots, A_n$ son sucesos cualesquiera)

(a) $P(A \bigcup B) \leq P(A) + P(B)$.

(b) $P(\bigcup_{j=1}^{j=n} A_j) \leq \sum_{j=1}^{j=n} P(A_j)$.

(c) $P(A \bigcap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

(d) $P(\bigcap_{j=1}^{j=n} A_j) \geq \sum_{j=1}^{j=n} P(A_j) - (n-1)$.

7.- Consideremos el espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ con la probabilidad dada por $P(\omega) = 1/4$ para cada $\omega \in \Omega$. Para cada una de las afirmaciones siguientes, da un ejemplo de tres sucesos $A, B, C \subset \Omega$ que la cumplan: **(a)** A, B, C son independientes dos a dos pero no son independientes. **(b)** A y B son independientes; B y C son independientes pero B no es independiente de $A \cup C$. **(c)** A y B son independientes; B y C son independientes pero B no es independiente de $A \cap C$. **(d)** ¿Es posible dar un ejemplo que cumpla la afirmación **b** pero no la **c**?

8.- Si se celebran 200 sorteos en cada uno de los cuáles se extrae un entero entre el 0 y el 99 999 (ambos inclusive, como en El Gordo de Navidad) ¿cuál es la probabilidad de que salga el mismo número al menos dos veces?

OBSERVACIÓN: con frecuencia es más cómodo calcular intersecciones que uniones..

SUGERENCIA: calcula la probabilidad del evento complementario..

9.- Zenobia se examina de 14 temas, pero solo se estudia 5. En el examen se eligen dos temas al azar, de los que Zenobia debe elegir uno. Calcula la probabilidad de que le toque al menos un tema que se sabe. ¿Cuál es el número mínimo de temas que debe preparar para tener una probabilidad superior a 1/2 de aprobar?

10.- INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN: Prueba que $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}, |I|=k} (-1)^{k-1} P(\cap_{i \in I} A_i)$.

11.- DIFÍCIL. EMPAREJAMIENTOS AL AZAR. Tenemos n cartas (mensajes), que colocamos al azar en n sobres (en vez de cuidadosamente poner cada carta en su sobre). Calcula la probabilidad de que al menos una carta esté en el sobre correcto. Estima dicha probabilidad cuando $n \to \infty$.

SUGERENCIA: usa Inclusión-Exclusión; observa que la probabilidad de que k cartas dadas estén en el sobre correcto es $(n-k)!/n!$.

12.- Disponemos de dos urnas, U_1, con 6 bolas azules y 8 blancas, y U_2, con 3 bolas azules y 9 blancas. Con un dado equilibrado se sortea la elección de una urna, se elige U_1 si sale 1, 2, 3 o 4, y U_2 en caso contrario. Posteriormente se extrae al azar una bola de la urna elegida. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea azul? Si la bola extraida resulta ser blanca ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna U_1?

13.- ENFERMEDADES RARAS. Cierto test para determinar si una determinada infección se ha producido, da falsos positivos en un 1 % de los casos, y falsos negativos en un 2 % de los casos. Se sabe que una de cada 100 000 personas está infectada, determina la probabilidad de que una persona escogida al azar esté infectada, sabiendo que el test ha dado positivo.

14.- CONTROL DE CALIDAD. En un proceso de producción, el $0'8\,\%$ de un cierto tipo de piezas resultan ser defectuosas. El control de calidad de la fábrica detecta una pieza que es defectuosa con 93 % de probabilidad, pero puede cometer el error de juzgar defectuosa una pieza normal con probabilidad del 6 %.

(a) Si el control determina que una pieza es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que lo sea?

(b) Si determina que es normal, ¿cuál es la probabilidad de que lo sea?

15.- Alberto y Benito eligen cada uno una sucesión de tres términos, cara o cruz, y a continuación lanzan una moneda equilibrada un número suficiente de veces para que salga de forma consecutiva una de las dos sucesiones. Gana aquél cuya sucesión sale antes. Escribimos 0 si sale cara, 1 si sale cruz. Alberto, astutamente, ofrece a Benito la posibilidad de elegir primero. Benito, inocentemente y pensando que todas las sucesiones tienen la misma probabilidad, elige 000, en vista de lo cual Ángel elige 100. Calcula la probabilidad de ganar de cada uno de ellos.

16.- Se supone que sólo una persona de cada 1000 tiene un cierto tipo de sangre. En una población infinita (de modo que elegir sucesivamente a unas cuantas personas no altera las probabilidades)

(a) halla la probabilidad de que en 3000 personas elegidas al azar no haya ninguna con este tipo de sangre;

(b) ¿cuál es el número mínimo de personas (elegidas al azar) cuya sangre debemos analizar para tener una probabilidad de al menos $\frac{1}{2}$ de que entre ellas haya alguna persona con este tipo de sangre.

17.- Se lanza un dado n veces, donde n es el número que sale en el primero de esos lanzamientos. Construir el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ que permite describir este fenómeno aleatorio. Hecho esto, calcular la probabilidad del suceso «sale un número par (o cero) de seises».

18.- Hacia 1600, Galileo escribió un pequeño opúsculo (*Sopra le scoperte dei dadi*) en el que estudiaba si al lanzar tres dados (un juego de azar popular entonces) era más probable la suma 9 o la suma 10. Observa que 9 y 10 pueden escribirse de seis formas distintas como suma de tres números:

$$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3,$$
$$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4.$$

Justifica —como consiguió hacer Galileo— que la suma 10 es más frecuente que la suma 9 en este juego, cosa que ya sabían los jugadores experimentados de la época.

19.- Dos jugadores de tenis, A y B, tienen probabilidades p y $1-p$ de ganar un punto cuando sirve A.

(a) Hallar la probabilidad de que A gane un juego en el que sirve y que en este momento está en situación de *deuce*.

(b) Hallar la probabilidad de que A gane un juego en el que sirve.

Los ejercicios siguientes tienen resultados que pueden resultar paradójicos en una primera impresión. Convéncete de que no hay tales paradojas.

20.- Se extrae al azar una ficha de dominó de un juego completo y se muestra solamente una de sus dos facetas, también escogida al azar, que resulta ser un 4. ¿Cuál es la probabilidad de que sea la ficha *blanca-cuatro*? (la respuesta no es $\frac{1}{7}$). ¿Cuál es la probabilidad de que sea el *cuatro doble*?

21.- (URNA DE PÓLYA) En una urna hay b bolas blancas y a azules. Extraemos una bola, miramos su color, la devolvemos a la urna y añadimos otra bola de ese mismo color. El proceso se repite indefinidamente. Llamemos B_n al suceso «sacamos bola blanca en la n-ésima extracción».

(a) ¿Cuál es la probabilidad del suceso B_2?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de haber sacado una bola blanca en la primera extracción si es que hemos sacado blanca en la segunda?

(c) DIFÍCIL. Probar que $\mathrm{P}(B_n) = \mathrm{P}(B_1)$ para cada $n \geq 1$.

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída sea blanca suponiendo que en la n-ésima extracción hemos obtenido una bola blanca?

22.- Sea $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$, donde p es un número primo; los elementos de Ω son equiprobables. Comprobar que (salvo en los casos triviales) dos sucesos A y B no pueden ser independientes.