70. Se quiere hallar una regla de diferenciación numérica para f''' de la forma

$$f'''(x) \approx Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h)$$

utiliza el método de los coeficientes indeterminados para hallar A, B, C, D, E. Encuentra a continuación una fórmula para el error.

71. Utiliza la fórmula de derivación numérica

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

para calcular $f''(0)$, donde $f(x) = \cos x$, con un error menor que 10^{-5}. Si trabajamos con una precisión aproximada de 16 cifras, ¿cuál será la precisión mayor con la que podremos calcular la derivada numérica?

72. Enuncia una regla numérica para la derivada cuarta y analiza su precisión.

73. Utiliza la regla numérica $x'(t) = (x(t+h) - x(t))/h$ para obtener los valores aproximados, en los puntos $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$, de la única función que verifica $x'(t) = x(t)$, $x(0) = 1$.

74. **(Programa)** Halla una regla para la derivada primera de la forma

$$f'(x) \approx Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h).$$

Programa la fórmula recién obtenida para calcular el valor de la derivada de la función

x	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	3.164674	3.215827	3.261584	3.302977	3.340765	3.375527	3.407712	3.437675
x	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	
$f(x)$	3.465704	3.492033	3.516857	3.540338	3.562614	3.583803	3.604007	

en los puntos $1.0, 1.1, 1.2, \ldots, 1.9, 2.0$. Haz una estimación global del error.

75. Resuelve por el método de eliminación de Gauss el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Escribe la descomposición $A = LU$.

76. Dado el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 6x+ & 2y+ & 2z = & -2 \\ 2x+ & (2/3)y+ & (1/3)z = & 1 \\ x+ & 2y- & z = & 0 \end{array} \right.$$

a. comprueba que su solución es $x = 2'6$, $y = -3'8$, $z = -5'0$;
b. trabajando con mantisa de cuatro dígitos resuelve por Gauss *sin* utilizar pivote parcial;
c. trabajando de nuevo con mantisa cuatro dígitos resuelve por Gauss utilizando pivote parcial.

77. Dada la ecuación

$$x(s) - \int_0^s \cos(\pi t) x(t) dt = 1$$

a. tomando $x(0) = x_0$, $x(1/4) = x_1$, $x(1/2) = x_2$, $x(3/4) = x_3$, $x(1) = x_4$, como incógnitas aproxima el valor de la integral con nodos en estos puntos y resuelve el sistema lineal que resulta;
b. resuelve analíticamente la ecuación y compara con el resultado numérico obtenido antes.

78. Hallar las matrices de Jacobi y de Gauss–Seidel para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hallar los autovalores de las matrices anteriores y determinar si los métodos iterativos correspondientes son o no convergentes.

79. El cálculo de los elementos de un *spline* cúbico natural con seis nodos igualmente separados plantea un sistema tridiagonal de la forma

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

a. Resuelve el sistema por el método de eliminación de Gauss.
b. Escribe explícitamente la descomposición LU.

80. a. Calcula el número de condición de la matriz de Hilbert 3×3

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}. \qquad \text{Sea} \qquad b = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1 \\ 5/6 \end{pmatrix}$$

b. Resuelve el sistema $H_3X = b$ trabajando con mantisa de cuatro dígitos. Compara el resultado obtenido con el resultado correcto.
c. Demuestra que la solución de $H_3X = b$ da los coeficientes del polinomio de segundo grado que mejor aproxima cuadráticamente a la función $f(x) = 5x^3$, $x \in [0,1]$. (Nota: el polinomio $p(x)$ de grado 2 que mejor aproxima cuadráticamente a una función f en el intervalo $[0,1]$ es el que minimiza la integral $\int_0^1 |f(x) - p(x)|^2 dx$ cuando p varía sobre todos los polinomios de grado menor o igual que 2.)

81. a. Escribe la matriz A de orden n dada por $a_{ij} = 2$ si $i = j$, $a_{ij} = 1$ si $i = j - 1$ ó $i = j + 1$ y $a_{ij} = 0$ en el resto de los casos.
b. Demuestra que A tiene determinante no nulo probando que el sistema lineal $AX = 0$ tiene solución única. (Sugerencia: demuestra que si $\alpha = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$, donde $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$ es solución del sistema, entonces $\alpha = 0$.)