27. Indica intervalos de longitud $0'1$ que contengan a cada una de las raíces del polinomio $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 3$ y calcula la mayor de ellas con un error inferior a $\frac{1}{2}10^{-3}$ por el método de la bisección.

28. Muestra que $x = a + b\cos x$ tiene al menos una raíz real, cualesquiera que sean los valores de a y b.

29. Indica intervalos de longitud $0'1$ que contengan a cada una de las raíces del polinomio $f(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$. Usa el método de la bisección para encontrar la menor raíz real y positiva de $f(x)$ con 3 cifras decimales correctas. (Los valores exactos de las raíces son $\cos((2j-1)\frac{\pi}{12})$, $j = 1, 2, \cdots, 6$.)

30. Dado $a > 0$ podemos calcular $\alpha = \sqrt[3]{a}$ por cualquiera de los dos procedimientos siguientes:
a. aplicando el método de Newton a $f(x) = x^3 - a$;
b. aplicando el método de Newton a $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$.
Determina cuál de los dos métodos converge más rápidamente. Calcula $\sqrt[3]{3}$ con cinco cifras decimales correctas.

31. Utiliza $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ para hallar el valor de $\cos(\pi/9)$ con cinco cifras decimales correctas por
a. el método de la bisección;
b. el método de Newton;
c. el método de la secante;
d. el método de la *regula falsi*.
Estudia empíricamente el orden de convergencia de cada uno de estos métodos.

32. a. Aisla las raíces de la ecuación $x = x^3 - x^2 - 1$.
b. Aproxima cada una de ellas por el método de Newton hasta conseguir cinco decimales correctos.
c. Utiliza el método de la secante para conseguir el mismo fin.

33. (**Método de Newton-Fourier**) Sea $f(x)$ una función dos veces diferenciable con continuidad en un intervalo que contenga a $[a, b]$, tal que $f(a) < 0, f(b) > 0$ y $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ para $a \le x \le b$. Comenzando con $x_0 = b$ define los iterados x_n según el método de Newton. A continuación, comenzando con $z_0 = a$, define los iterados

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}, \quad n \ge 0.$$

a. Da una interpretación geométrica de este procedimiento.
b. Muestra que $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $[a, b]$, que los iterados x_n decrecen estrictamente hacia α y que los iterados z_n crecen estrictamente hacia α.
c. Encuentra la mayor raíz del polinomio $f(x) = x^5 - x - 1$ con un error inferior a $\frac{1}{2}10^{-5}$ usando el método de Newton-Fourier.

34. (**Programa**) Programa el método de la bisección para obtener la raíz positiva de la ecuación $-x + 35(1 - e^{-0{,}04x}) = 0$ con un error inferior a 10^{-8}. Diseña el programa de manera que pida el dato inicial y que produzca tres columnas que contengan x_n, $f(x_n)$ y la estimación del error.

35. (**Programa**) Diseña un programa que permita encontrar la raíz del polinomio $f(x) = x^6 - x - 1$ comprendida en el intervalo $[1, 2]$ utilizando el método de Newton, exhibiendo los valores de los iterados x_n y los de $f(x_n)$. Haz el programa de tal manera que calcule los iterados hasta que la diferencia entre dos de ellos, consecutivos, sea inferior a $\frac{1}{2}10^{-8}$. ¿Con cuántos decimales correctos puedes asegurar que has calculado la raíz del polinomio dado?

36. (**Programa**) Haz lo mismo que en el problema anterior usando el método de la secante.

37. Dada la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$ se quiere aproximar su raíz $x = 2$ partiendo de un valor próximo x_0 por algún método iterativo $x_{n+1} = F(x_n)$.
a. Estudia la convergencia del método $F(x) = x^2 - 2$ obtenido a partir de $x = x^2 - 2$.
b. Estudia la convergencia del método $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ obtenido a partir de $x^2 = x + 2$.
c. Halla una constante k tal que el método $x_{n+1} = x_n + k(x_n^2 - x_n - 2)$ sea convergente cerca de $x = 2$. Determina sobre qué intervalo el método es convergente para la constante k obtenida.

38. Prueba que la ecuación $e^x - 100x^2 = 0$ tiene exactamente tres soluciones reales y halla intervalos de longitud $0'1$ que las contengan. Observa que cada una de las ecuaciones

$$x = \frac{e^{x/2}}{10}, \qquad x = 2(\log x + \log 10), \qquad x = -\frac{e^{x/2}}{10},$$

es equivalente a la dada (al menos en un intervalo de la recta) y verifica que cada una de ellas define un método iterativo convergente para al menos una de las soluciones de la ecuación. Indica a que raíz converge cada método. Aproxima con error menor que 10^{-3} la mayor de las raíces utilizando el método correspondiente.

39. Se consideran sucesiones definidas por las siguientes leyes de iteración:

$$\mathbf{a}.\ x_{n+1} = -16 + 6x_n + \frac{12}{x_n} \qquad \mathbf{b}.\ x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{x_n^2} \qquad \mathbf{c}.\ x_{n+1} = \frac{12}{1+x_n}$$

Determina sobre qué intervalos de la recta convergen y cuál será el límite.

40. Halla los polinomios interpoladores de segundo y tercer grado con nodos en los puntos $0, 1, -1$ y $-2, -1, 1, 2$ respectivamente de las funciones: **a.** $f(x) = x$, **b.** $f(x) = x^2$, **c.** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, **d.** $f(x) = 1/(2x+1)$, **e.** $f(x) = 1/(1+x^2)$. Compara los polinomios obtenidos con las funciones correspondientes. Decide cuál es el polinomio interpolador de grado $n+k$ de un polinomio de grado n.

41. Halla el polinomio interpolador de tercer grado de la función $\operatorname{sen} x$ con nodos en los puntos $0, \pi/4, 3\pi/4, \pi$. Halla el polinomio interpolador de cuarto grado con nodos en los puntos $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$. En ambos casos da una cota superior del error.

42. A partir de la siguiente tabla de logaritmos decimales

x	1'0	1'5	2'0	3'0	3'5
$\log x$	0'00000	0'17609	0'30103	0'47712	0'54407

forma una tabla de diferencias divididas y utilízala para estimar $\log 1'25$ y $\log 2'5$ por interpolación cúbica. Estima el error de estas aproximaciones. Compara la diferencia de los valores calculados con el valor de $\log 2$.

43. Dada la tabla

x	0'0	0'2	0'4	0'6	0'8	1'0
$\arctan x$	0'000000	0'197396	0'380506	0'540420	0'674741	0'785398

halla el valor de $\arctan(0'67)$ con tres dígitos correctos utilizando la interpolación polinómica adecuada al caso. Utilizando la tabla en sentido contrario determina por el mismo método el valor de $\tan(\pi/6)$ con tres dígitos correctos.

44. **(Programa)** Escribe un programa que calcule las diferencias divididas para la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

en nodos igualmente espaciados del intervalo $[-5, 5]$.

45. Se quiere construir una tabla de logaritmos decimales para los valores de x entre 1 y 10, de forma que interpolando linealmente sus valores se obtengan cuatro cifras decimales correctas. Determina cuál debe ser el paso de la tabla y cuantas cifras decimales correctas deben tener los valores de la tabla.

46. Se conocen los siguientes datos de una función $f(x)$:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0'4	1'554284	0'243031
0'5	1'561136	-0'089618

Estima el valor de f para $x = 0'473$.

47. Considera el polinomio $\Psi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ para nodos igualmente espaciados entre sí una distancia h. Demuestra que

$$|\Psi(x)| \leq n!h^{(n+1)}, \qquad x_0 \leq x \leq x_n.$$

Si $P_n(x)$ es el polinomio de interpolación de la función $f(x) = e^x$ en $[0, 1]$, usa el resultado anterior para demostrar que

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - P_n(x)| \to 0 \quad \text{cuando}\, n \to \infty\ .$$

48. De una función $f(x)$, de clase C^3, se conocen las siguientes cotas:

$$1 \leq f'(x) \leq 3, \qquad |f''(x)| \leq 1, \qquad |f^{(3)}(x)| \leq 1, \qquad |f^{(4)}(x)| \leq 1,$$

para todo $x \in \mathbf{R}$. Tenemos, además, la siguiente tabla de valores exactos:

x	0'4	0'5	0'6	0'7
$f(x)$	1'1894183	1'4794255	1'7646425	2'0442177

Determina la solución α a la ecuación $f(x) = 1'5$ con un error menor que $0'0001$. (Interpola la inversa $f^{-1}(y)$).

49. Determina si la siguiente función es un spline cúbico en el intervalo $[0, 2]$:

$$s(x) = (x-1)^3 \quad \text{en} \quad [0,1], \qquad s(x) = 2(x-1)^3 \quad \text{en} \quad [1,2].$$