BIOESTADÍSTICA

Modelos de Probabilidad más comunes

- X: Variable aleatoria.
- $E(X)$: Esperanza (media) de X
- $V(X)$: Varianza de X
- $F(x) = P(X \leq x)$: Función de Distribución.
- $f(x)$: Función de densidad

1. **Binomial:** $X \sim B(n; p)$ con $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq 1$ y $q = 1 - p$.
   - $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.
   - $E(X) = n\, p, \quad V(X) = n\, p\, q$.

2. **Poisson:** $X \sim P(\lambda)$ con $\lambda > 0$.
   - $P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}, \quad$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$.
   - $E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda$.

3. **Uniforme:** $X \sim U(a, b)$ con $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
   - $f(x) = \dfrac{1}{b - a}, \quad$ si $x \in (a, b)$.
   - $F(x) = \dfrac{x - a}{b - a}, \quad$ si $x \in (a, b)$.
   - $E(X) = \dfrac{a + b}{2}, \quad V(X) = \dfrac{(b - a)^2}{12}$.

4. **Normal:** $X \sim N(\mu, \sigma)$ con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$.
   - $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
   - $E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2$.

5. **Exponencial:** $X \sim \exp(\lambda)$, con $\lambda > 0$.
   - $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, $x > 0$.
   - $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$.
   - $E(X) = 1/\lambda, \quad V(X) = 1/\lambda^2$.

Los modelos siguientes los utilizaremos mediante tablas. Damos sus funciones de densidad a título informativo. La función Γ que en ellas aparece se calcula de forma iterativa utilizando: $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

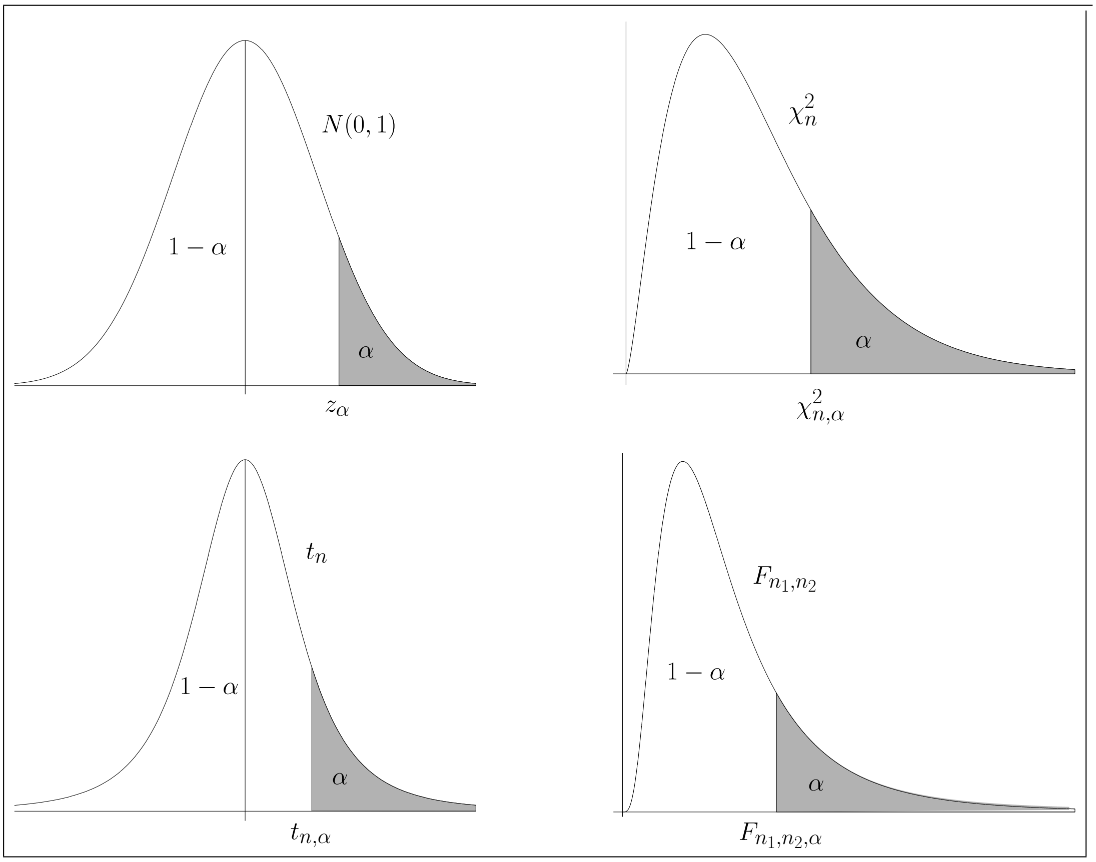
6. **Ji cuadrado de Pearson con n grados de libertad:** $X \sim \chi^2_n$, con $n \in \mathbb{N}$.
   - $f(x) = \dfrac{x^{(n/2)-1} e^{-x/2}}{\Gamma\frac{n}{2} \cdot 2^{n/2}}$, $x > 0$.
   - $E(X) = n; \quad V(X) = 2\, n$.

7. **t de Student con n grados de libertad:** $X \sim t_n$.

- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$.
- $E(X) = 0; \quad V(X) = \dfrac{n}{n-2}$, $(n > 2)$.

8. **F de Snedecor con m y n grados de libertad:** $X \sim F(m, n)$.

- $f(x) = \dfrac{m}{n} \dfrac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\dfrac{m}{n}x\right)^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \dfrac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}$
- $E(X) = \dfrac{n}{n-2}$, $(n > 2)$; $\quad V(X) = \dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$, $(n > 4)$.



Aproximaciones de una distribución Binomial

- $\boxed{\text{Aproximación de una Binomial por una Normal}}$

  Para n grande $(n \geq 30)$ y, por ejemplo, $0'1 < p < 0'9$:

$$B(n,p) \approx N\Big(\mu = n\,p, \sigma = \sqrt{n\,p\,(1-p)}\,\Big)$$

- $\boxed{\text{Aproximación de una Binomial por una Poisson}}$

  Para n grande $(n \geq 30)$ y $0 < p < 0'1$:

$$B(n,p) \approx P\Big(\lambda = n\,p\Big)$$

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple (m.a.s.) de X.
Media muestral:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

Cuasi-varianza muestral:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$\boxed{\text{Distribución de } \bar{X} \text{ cuando } X \sim N(\mu, \sigma)}$

Si $X \sim N(\mu, \sigma)$ y $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una m.a.s. de X, entonces $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$

Intervalos de confianza más usuales

1. $\boxed{X \sim N(\mu, \sigma)}$

$$\text{Intervalo de confianza } 1-\alpha \text{ para } \mu\text{:} \quad \begin{cases} I = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] & (\sigma \text{ conocida}) \\[2ex] I = \left[\bar{x} \pm t_{n-1;\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right] & (\sigma \text{ desconocida}) \end{cases}$$

Intervalo de confianza $1-\alpha$ para σ^2: $I = \left[\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}\ ,\ \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}\right]$

2. $\boxed{X \sim B(1, p)}$ (muestras grandes).

Intervalo de confianza $1-\alpha$ para p: $I = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right]$

3. $\boxed{X \sim P(\lambda)}$

Intervalo de confianza $1-\alpha$ para λ: $I = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{x}}{n}}\right]$

4. $\boxed{\text{Dos poblaciones Normales independientes}}$

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ independientes

$(X_1, \ldots, X_{n_1})$ m.a.s. de X; se calcula $\bar{x}$ y s_1^2.

$(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ m.a.s. de Y; se calcula $\bar{y}$ y s_2^2.

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)\,s_1^2 + (n_2-1)\,s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Intervalo de confianza $1-\alpha$ para $\mu_1-\mu_2$:

$$I = \left[\bar{x}-\bar{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right] \qquad \sigma_1,\ \sigma_2 \text{ conocidas}$$

$$I = \left[\bar{x}-\bar{y} \pm t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}\ s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right] \qquad \sigma_1,\ \sigma_2 \text{ desconocidas, } \sigma_1=\sigma_2$$

El caso $\sigma_1,\ \sigma_2$ desconocidas, $\sigma_1 \neq \sigma_2$ es complicado

Intervalo de confianza $1-\alpha$ para σ_1^2/σ_2^2: $I = \left[\dfrac{s_1^2/s_2^2}{F_{n_1-1;n_2-1;\alpha/2}}\ ,\ (s_1^2/s_2^2)\, F_{n_2-1;n_1-1;\alpha/2}\right]$

5. $\boxed{\text{Comparación de proporciones}}$ (muestras grandes e independientes)

$X \sim B(1,p_1)$, $Y \sim B(1,p_2)$, independientes.

$(X_1,\ldots,X_{n_1})$ m.a.s. de X; se calcula $\bar{x}$ y s_1^2.

$(Y_1,\ldots,Y_{n_2})$ m.a.s. de Y; se calcula $\bar{y}$ y s_2^2.

Intervalo de confianza $1-\alpha$ para p_1-p_2: $I = \left[\bar{x}-\bar{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\bar{x}\,(1-\bar{x})}{n_1}+\dfrac{\bar{y}\,(1-\bar{y})}{n_2}}\right]$

6. $\boxed{\text{Datos emparejados}}$

$X \sim \mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1)$, $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2)$.

$D = X-Y \sim N(\mu=\mu_1-\mu_2,\ \sigma)$,

donde el cálculo de σ supera el nivel de este curso.

Contrastes de hipótesis más usuales

- α = nivel de significación del contraste.
- n = tamaño de la muestra.
- H_0 = hipótesis nula.
- R = región crítica o de rechazo de H_0.

1.- $\boxed{X \sim N(\mu,\sigma)}$

$H_0: \mu=\mu_0$ (σ conocida) $\qquad R = \left\{|\bar{x}-\mu_0| > z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$

$H_0: \mu=\mu_0$ (σ desconocida) $\qquad R = \left\{|\bar{x}-\mu_0| > t_{n-1;\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\}$

$H_0: \mu\leq\mu_0$ (σ conocida) $\qquad R = \left\{\bar{x}-\mu_0 > z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$

$H_0: \mu\leq\mu_0$ (σ desconocida) $\qquad R = \left\{\bar{x}-\mu_0 > t_{n-1;\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\}$

$H_0: \mu\geq\mu_0$ (σ conocida) $\qquad R = \left\{\bar{x}-\mu_0 < z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$

$H_0: \mu\geq\mu_0$ (σ desconocida) $\qquad R = \left\{\bar{x}-\mu_0 < t_{n-1;1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\}$

$H_0: \sigma=\sigma_0$ $\qquad R = \left\{\frac{n-1}{\sigma_0^2}\, s^2 \notin \left[\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\ ,\ \chi^2_{n-1;\alpha/2}\right]\right\}$

$$H_0 : \sigma \leq \sigma_0 \qquad R = \left\{ \tfrac{n-1}{\sigma_0^2}\, s^2 > \chi^2_{n-1;\alpha} \right\}$$

$$H_0 : \sigma \geq \sigma_0 \qquad R = \left\{ \tfrac{n-1}{\sigma_0^2}\, s^2 < \chi^2_{n-1;1-\alpha} \right\}$$

2.- $\boxed{X \sim B(1,p)}$ (muestras grandes)

$$H_0 : p = p_0 \qquad R = \left\{ |\bar{x} - p_0| > z_{\alpha/2} \sqrt{\tfrac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\}$$

$$H_0 : p \leq p_0 \qquad R = \left\{ \bar{x} - p_0 > z_{\alpha} \sqrt{\tfrac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\}$$

$$H_0 : p \geq p_0 \qquad R = \left\{ \bar{x} - p_0 < z_{1-\alpha} \sqrt{\tfrac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\}$$

3.- $\boxed{X \sim P(\lambda)}$ (muestras grandes)

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \qquad R = \left\{ |\bar{x} - \lambda_0| > z_{\alpha/2} \sqrt{\lambda_0/n} \right\}$$

$$H_0 : \lambda \leq \lambda_0 \qquad R = \left\{ \bar{x} - \lambda_0 > z_{\alpha} \sqrt{\lambda_0/n} \right\}$$

$$H_0 : \lambda \geq \lambda_0 \qquad R = \left\{ \bar{x} - \lambda_0 < z_{1-\alpha} \sqrt{\lambda_0/n} \right\}$$

4.- $\boxed{\text{Dos poblaciones Normales independientes}}$ (s_p^2 calculado como en los intervalos de confianza)

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \ (\sigma_1, \sigma_2 \text{ conocidas}) \qquad R = \left\{ |\bar{x} - \bar{y}| > z_{\alpha/2} \sqrt{\tfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \tfrac{\sigma_2^2}{n_2}} \right\}$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \ (\sigma_1 = \sigma_2) \qquad R = \left\{ |\bar{x} - \bar{y}| > t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}\ s_p \sqrt{\tfrac{1}{n_1} + \tfrac{1}{n_2}} \right\}$$

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 \ (\sigma_1, \sigma_2 \text{ conocidas}) \qquad R = \left\{ \bar{x} - \bar{y} > z_{\alpha} \sqrt{\tfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \tfrac{\sigma_2^2}{n_2}} \right\}$$

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 \ (\sigma_1 = \sigma_2) \qquad R = \left\{ \bar{x} - \bar{y} > t_{n_1+n_2-2;\alpha}\ s_p \sqrt{\tfrac{1}{n_1} + \tfrac{1}{n_2}} \right\}$$

$$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \ (\sigma_1, \sigma_2 \text{ conocidas}) \qquad R = \left\{ \bar{x} - \bar{y} < z_{1-\alpha} \sqrt{\tfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \tfrac{\sigma_2^2}{n_2}} \right\}$$

$$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \ (\sigma_1 = \sigma_2) \qquad R = \left\{ \bar{x} - \bar{y} < t_{n_1+n_2-2;1-\alpha}\ s_p \sqrt{\tfrac{1}{n_1} + \tfrac{1}{n_2}} \right\}$$

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \qquad R = \left\{ s_1^2/s_2^2 \notin \left[F_{n_1-1;n_2-1;1-\alpha/2}\ ,\ F_{n_1-1;n_2-1;\alpha/2} \right] \right\}$$

$$H_0 : \sigma_1 \leq \sigma_2 \qquad R = \{ s_1^2/s_2^2 > F_{n_1-1;n_2-1;\alpha} \}$$

$$H_0 : \sigma_1 \geq \sigma_2 \qquad R = \{ s_1^2/s_2^2 < F_{n_1-1;n_2-1;1-\alpha} \}$$

5.- $\boxed{\text{Comparación de proporciones}}$ (muestras grandes e independientes)

$$\left. \begin{array}{ll} X \sim B(1,p_1), & (X_1, \dots X_{n_1}) \text{ m.a.s. de } X \\ Y \sim B(1,p_2), & (Y_1, \dots Y_{n_2}) \text{ m.a.s. de } Y \end{array} \right\} \quad \rightsquigarrow \quad \bar{p} = \frac{\sum_i x_i + \sum_i y_i}{n_1 + n_2} = \frac{n_1\, \bar{x} + n_2\, \bar{y}}{n_1 + n_2}$$

$$H_0: p_1 = p_2 \qquad R = \left\{ |\bar{x} - \bar{y}| > z_{\alpha/2} \sqrt{\bar{p}\,(1-\bar{p}) \left(\tfrac{1}{n_1} + \tfrac{1}{n_2} \right)} \right\}$$

$$H_0: p_1 \leq p_2 \qquad R = \left\{ \bar{x} - \bar{y} > z_{\alpha} \sqrt{\bar{p}\,(1-\bar{p}) \left(\tfrac{1}{n_1} + \tfrac{1}{n_2} \right)} \right\}$$

$$H_0: p_1 \geq p_2 \qquad R = \left\{ \bar{x} - \bar{y} < z_{1-\alpha} \sqrt{\bar{p}\,(1-\bar{p}) \left(\tfrac{1}{n_1} + \tfrac{1}{n_2} \right)} \right\}$$

Contrastes χ^2

- α = nivel de significación del contraste.
- n = tamaño de la muestra.
- H_0 = hipótesis nula.
- R = región crítica o de rechazo de H_0.

1. $\boxed{\text{Contraste de la bondad del ajuste: Primer caso}}$

- H_0 : La población X sigue el modelo P indicado.
- $A_1, A_2, \ldots, A_k$: k clases de los posibles valores de X.
- O_i = frecuencia observada en la clase A_i.
- $e_i = n\,P(A_i)$ = frecuencia esperada en la clase A_i, suponiendo que H_0 es cierta.

$$R = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{O_i^2}{e_i} - n > \chi^2_{k-1;\,\alpha} \right\}$$

2. $\boxed{\text{Contraste de la bondad del ajuste: Segundo caso.}}$

- H_0 : La población X sigue algún modelo P_θ de una cierta familia de distribuciones
- r = número de los parámetros desconocidos: $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$.
- $A_1, A_2, \ldots, A_k$: k clases de los posibles valores de X.
- O_i = frecuencia observada en la clase A_i.
- $e_i = n\,P_{\hat{\theta}}(A_i)$ = frecuencia esperada en la clase A_i, suponiendo que H_0 es cierta (y usando el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ del parámetro θ).

$$R = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{O_i^2}{e_i} - n > \chi^2_{k-1-r;\,\alpha} \right\}$$

3. $\boxed{\text{Contraste de homogeneidad de poblaciones}}$

- H_0 : Las p poblaciones $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son homogéneas
- $A_1, A_2, \ldots, A_k$: k clases de los posibles valores de X.
- O_{ij} = frecuencia observada en la clase A_i con la muestra j-ésima.
- $e_{ij} = n_j\,\hat{P}(A_i) = \frac{1}{n}(\sum \text{columna } i\text{-ésima }) \cdot (\sum \text{fila } j\text{-ésima })$ = frecuencia esperada en la clase A_i con la muestra j-ésima, si H_0 es cierta.

$$R = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p} \frac{(O_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p} \frac{O_{ij}^2}{e_{ij}} - n > \chi^2_{(k-1)(p-1);\,\alpha} \right\}$$

4. $\boxed{\text{Contraste de independencia}}$

- H_0 : Las características X e Y de la población son independientes.
- $A_1 \times B_1, \ldots, A_i \times B_j, \ldots, A_k \times B_p$: $k\,p$ clases de los posibles valores de $X \times Y$.
- O_{ij} = frecuencia observada en la clase $A_i \times B_j$.
- $e_{ij} = n\,\hat{P}(A_i)\,\hat{P}(B_j) = \frac{1}{n}(\sum \text{columna } i\text{-ésima}) \cdot (\sum \text{fila } j\text{-ésima})$ = frecuencia esperada en la clase $A_i \times B_j$ suponiendo que H_0 es cierta.

$$R = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p} \frac{(O_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p} \frac{O_{ij}^2}{e_{ij}} - n > \chi^2_{(k-1)(p-1);\,\alpha} \right\}$$