Análisis de datos

2º de Biología

II. ANOVA multifactor

Departamento de Matemáticas

Universidad Autónoma de Madrid

2011/12

Modelos

Diseño por bloques

Interacción

ANOVA de dos factores con interacción

Tres factores. Cuadrados latinos

Diagnosis

Tema 2. Análisis de la varianza multifactorial

El problema

Se quiere analizar si una magnitud determinada (variable respuesta) tiene la misma distribución en varias poblaciones distintas, diferenciadas en el análisis por dos o más factores (variables explicativas).

Elementos

- Variable a explicar (también llamada variable respuesta) Y_{ij}.
- Factores: variables explicativas *discretas* y sus niveles (poblaciones, cualidades, grupos, tratamientos, ...).
- Número de niveles de cada uno de los factores.

Ejemplo

Efecto de tres medicamentos en la reducción de la presión arterial, diferenciado en hombres y mujeres.

- Variable a explicar: reducción de la presión arterial
- Factores: medicamento (tres niveles), sexo (dos niveles).

Modelos

1. Dos factores
    - Diseño por bloques: dos factores, sin interacción
    - Diseño factorial:
        - Efectos principales
        - Interacciones
    - Otros
2. Más de dos factores
    - Cuadrados latinos
    - Otros

Diseño por bloques

- Interesa saber si la variable Y tiene los mismos valores en los distintos niveles del factor A. Los valores pueden depender de los niveles de un segundo factor B.
- El factor A tiene I niveles; el factor B, J niveles.
- Para cada nivel de A se realizan J mediciones de Y: una medición en cada nivel de B (en total de $I \times J$ mediciones).

EJEMPLOS:

- Eficiencia de varios modelos de una máquina. Se controla la influencia del medio ambiente. Factores: modelo de la máquina, condiciones ambientales.
- Análisis de muestras. Factores: muestra, analista.
- Eficacia de distintos tratamientos (dosis) con un determinado medicamento. Factores: tratamiento, edad del paciente.

Diseño por bloques: Modelo

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + U_{ij}; \qquad i = 1, 2, \ldots, I \quad j = 1, 2, \ldots, J$$

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = \sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0$$

- Y_{ij} respuesta de la variable para el i-ésimo nivel del primer factor (A) y el j-ésimo nivel del segundo factor (B).
- μ: valor medio de Y
- α_i: efecto del nivel i del factor A sobre la media global μ.
- β_j: efecto del nivel j del factor B sobre la media global μ.
- $\mu_{ij} = E[Y_{ij}] = \mu + \alpha_i + \beta_j$: valor medio de Y_{ij}; $\sum \alpha_i = 0$, $\sum \beta_i = 0$.
- U_{ij} es la variabilidad aleatoria de Y_{ij}.
- Supondremos que U_{ij} sigue una distribución $N(0, \sigma)$ lo que implica que Y_{ij} sigue una distribución $N(\mu + \alpha_i + \beta_j, \sigma)$.
- $\sigma^2 = \mathrm{Var}\, U_{ij} = \mathrm{Var}\, Y_{ij}$ la misma para cualesquiera i, j.

Muestra

Factor B

Factor A

Niveles	1	2	...	J	Media
1	Y_{11}	Y_{12}	...	Y_{1J}	$\bar{Y}_{1\cdot}$
2	Y_{21}	Y_{22}	...	Y_{2J}	$\bar{Y}_{2\cdot}$
...	...	...	...	...	...
I	Y_{I1}	Y_{I2}	...	Y_{IJ}	$\bar{Y}_{I\cdot}$
Medias	$\bar{Y}_{\cdot 1}$	$\bar{Y}_{\cdot 2}$	...	$\bar{Y}_{\cdot J}$	$\bar{Y}_{\cdot\cdot}$

$Y_{ij} \sim N(\mu + \alpha_i + \beta_j, \sigma)$, independientes

Estimación de parámetros

Parámetros desconocidos: $\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_I, \beta_1, \ldots, \beta_J, \sigma$
Ligaduras: $\sum \alpha_i = \sum \beta_j = 0$. Parámetros independientes: $I + J$.
Estimaciones:

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..} = \frac{1}{iJ} \sum_i \sum_j y_{ij}$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} = \frac{1}{J} \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{..})$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..} = \frac{1}{i} \sum_i (y_{ij} - \bar{y}_{..})$$

Falta por estimar el último parámetro σ^2.

Residuos y varianza residual

La varianza σ^2 se estimará por medio de la varianza residual

Para definirla hace falta primero ver como se estiman los residuos

El residuo e_{ij} será la diferencia del dato y_{ij} y la media de Y_{ij}

Esta última se estima por: $\hat{\mu}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j$

Es decir: $\hat{\mu}_{ij} = \bar{y}_{i\cdot} + \bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\cdot\cdot}$

Por tanto $e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y}_{\cdot\cdot}$

Varianza residual:

$$S_R^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{(i-1)(J-1)} \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y}_{\cdot\cdot})^2$$

Ejemplo: Eficiencia (en emisión de CO_2) de 5 desaladoras.

La salinidad del agua a desalar puede influir en la eficiencia.
Se controla por medio de tres bloques: baja, media y alta salinidad.
Factor A: Tipo de máquina, cinco niveles ($I = 5$).
Factor B (bloques): salinidad, tres niveles ($J = 3$).

		Salinidad			
		Baja	Media	Alta	$\bar{Y}_{i\cdot}$
Máquina	I	24	26	29	$26{,}33$
	II	27	30	32	$29{,}67$
	III	26	27	30	$27{,}67$
	IV	25	28	28	$27{,}00$
	V	28	29	31	$29{,}33$
	$\bar{Y}_{\cdot j}$	$26{,}00$	$28{,}00$	$30{,}00$	$\bar{Y}_{\cdot\cdot} = 28{,}00$

Desaladoras: parámetros

		Salinidad				
		Baja	Media	Alta	$\bar{Y}_{i\cdot}$	$\hat{\alpha}_i$
Máquina	I	24	26	29	$26{,}33$	$-1{,}67$
	II	27	30	32	$29{,}67$	$1{,}67$
	III	26	27	30	$27{,}67$	$-0{,}33$
	IV	25	28	28	$27{,}00$	$-1{,}00$
	V	28	29	31	$29{,}33$	$1{,}33$
	$\bar{Y}_{\cdot j}$	$26{,}00$	$28{,}00$	$30{,}00$	$28{,}00$	
	$\hat{\beta}_j$	$-2{,}00$	$0{,}00$	$2{,}00$		

$S_R^2 = 0{,}58$

Contrastes de hipótesis

Se quiere contrastar la hipótesis nula:

$\mathbf{H}_0 \equiv \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0$

contra la alternativa:

$\mathbf{H}_1 \equiv \exists i \qquad \text{tal que} \quad \alpha_i \neq 0$

por medio de una análisis de la varianza.

Resulta que al mismo tiempo se obtendrá un contraste para la hipótesis nula:

$\mathbf{H}_0 \equiv \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0$

contra la alternativa

$\mathbf{H}_1 \equiv \exists j \qquad \text{tal que} \quad \beta_j \neq 0$

ANOVA

Sumas de cuadrados

- **Explicada por A:** $\text{SCE(A)} = J \sum_i (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2 = J \sum_i \hat{\alpha}_i^2$
- **Explicada por B:** $\text{SCE(B)} = I \sum_j (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2 = I \sum_i \hat{\beta}_i^2$
- **Residual:** $\text{SCR} = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y}_{\cdot\cdot})^2$
- **Total:** $\text{SCT} = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2$

Al igual que en ANOVA unifactorial, se verifica que:

$$\text{SCE(A)} + \text{SCE(B)} + \text{SCR} = \text{SCT}$$

Contraste ANOVA

Se contrasta por separado el efecto de cada factor:

Factor A:

$\mathsf{H}_0 \equiv \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0$

$\mathsf{H}_1 \equiv \exists i \mid \alpha_i \neq 0$

Estadístico de contraste: $$F_A = \frac{\mathsf{SCE(A)}/(I-1)}{\mathsf{SCR}/[(I-1)(J-1)]}$$

Factor B:

$\mathsf{H}_0 \equiv \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0$

$\mathsf{H}_1 \equiv \exists j \mid \beta_j \neq 0$

Estadístico de contraste: $$F_B = \frac{\mathsf{SCE(B)}/(J-1)}{\mathsf{SCR}/[(I-1)(J-1)]}$$

Tabla ANOVA

Fuente	Suma de cuadrados	g.l.	Varianza	Estadístico F	p-valor
Factor A	SCE(A)	$I-1$	$S^2_{\mathsf{A}} = \dfrac{\mathsf{SCE(A)}}{I-1}$	$F_{\mathsf{A}} = \dfrac{S^2_{\mathsf{A}}}{S^2_R}$	p_A
Factor B	SCE(B)	$J-1$	$S^2_{\mathsf{B}} = \dfrac{\mathsf{SCE(B)}}{J-1}$	$F_{\mathsf{B}} = \dfrac{S^2_{\mathsf{B}}}{S^2_R}$	p_B
Residual	SCR	$(I-1)(J-1)$	$S^2_R = \dfrac{\mathsf{SCR}}{(I-1)(J-1)}$		
Total	SCT	$IJ-1$			

Deasaldoras: resultados

ANOVA

Fuente de Variación	S. C.	g.l.	M. Cuad.	F	p-val.	F-crítica
Máquina	25,33	4	6,33	10,86	0,0026	3,84
Salinidad	40,00	2	20,00	34,29	0,0001	4,46
Error	4,67	8	0,58			
Total	70,00	14				

La eficiencia media no es la misma para todas las máquinas (p-valor $= 0{,}0026$).

¿Qué ocurre si no controlamos por la salinidad?: ANOVA de un factor

ANOVA

Fuente de Variación	S. C.	g.l.	M. Cuad.	F	p-val.	F-crítica
Máquina	25,33	4	6,33	1,418	0,2972	
Error	44,67	10	4,46			
Total	70,00	14				

No se rechaza (p-valor $= 0{,}30$) la hipótesis de igualdad de medias de eficiencia en cuanto a emisiones de CO_2.

Ejemplo: galletas de bajo contenido en grasa

A fin de determinar si tres marcas de galletas (I, II, III) de bajo contenido en grasa tienen porcentajes distintos, se analizan muestras de cada una por cuatro analistas (A, B, C, D) diferentes. Cada uno de ellos determina el porcentaje de grasa en una muestra de cada tipo de galleta.

	A	B	C	D
I	8,16	8,67	7,91	8,93
II	10,20	9,18	8,41	7,39
III	9,44	7,65	7,14	8,41

continúa

	A	B	C	D	n	Σ	Σ^2
I	8,16	8,67	7,91	8,93	4	33,67	284,07
II	10,20	9,18	8,41	7,39	4	35,20	313,97
III	9,44	7,65	7,14	8,41	4	32,65	269,51
n	3	3	3	3	12		
Σ	27,80	25,50	23,47	24,75		101,52	
Σ^2	259,74	217,96	184,44	205,40			867,55

continúa

	A	B	C	D	n	Σ	Σ^2	α
I	8,16	8,67	7,91	8,93	4	33,67	284,07	$-0{,}04$
II	10,20	9,18	8,41	7,39	4	35,20	313,97	0,34
III	9,44	7,65	7,14	8,41	4	32,65	269,51	$-0{,}30$
n	3	3	3	3	12			
Σ	27,80	25,50	23,47	24,75		101,52		
Σ^2	259,74	217,96	184,44	205,40			867,55	
β	0,81	0,04	$-0{,}64$	$-0{,}21$				

- Sumas de cuadrados

continúa

	A	B	C	D	n	Σ	Σ^2	α
I	8,16	8,67	7,91	8,93	4	33,67	284,07	−0,04
II	10,20	9,18	8,41	7,39	4	35,20	313,97	0,34
III	9,44	7,65	7,14	8,41	4	32,65	269,51	−0,30
n	3	3	3	3	12			
Σ	27,80	25,50	23,47	24,75		101,52		
Σ^2	259,74	217,96	184,44	205,40			867,55	
β	0,81	0,04	−0,64	−0,21				

- Sumas de cuadrados
- SCE(A) $= 0{,}82365$

continúa

	A	B	C	D	n	Σ	Σ^2	α
I	8,16	8,67	7,91	8,93	4	33,67	284,07	−0,04
II	10,20	9,18	8,41	7,39	4	35,20	313,97	0,34
III	9,44	7,65	7,14	8,41	4	32,65	269,51	−0,30
n	3	3	3	3	12			
Σ	27,80	25,50	23,47	24,75		101,52		
Σ^2	259,74	217,96	184,44	205,40			867,55	
β	0,81	0,04	−0,64	−0,21				

- Sumas de cuadrados
- SCE(A) $= 0{,}82365$
- SCE(B) $= 3{,}3053$

continúa

	A	B	C	D	n	Σ	Σ^2	α
I	8,16	8,67	7,91	8,93	4	33,67	284,07	−0,04
II	10,20	9,18	8,41	7,39	4	35,20	313,97	0,34
III	9,44	7,65	7,14	8,41	4	32,65	269,51	−0,30
n	3	3	3	3	12			
Σ	27,80	25,50	23,47	24,75		101,52		
Σ^2	259,74	217,96	184,44	205,40			867,55	
β	0,81	0,04	−0,64	−0,21				

- Sumas de cuadrados
- SCE(A) $= 0{,}82365$
- SCE(B) $= 3{,}3053$
- SCT $= 8{,}6892$

continúa

	A	B	C	D	n	Σ	Σ^2	α
I	8,16	8,67	7,91	8,93	4	33,67	284,07	$-0{,}04$
II	10,20	9,18	8,41	7,39	4	35,20	313,97	0,34
III	9,44	7,65	7,14	8,41	4	32,65	269,51	$-0{,}30$
n	3	3	3	3	12			
Σ	27,80	25,50	23,47	24,75		101,52		
Σ^2	259,74	217,96	184,44	205,40			867,55	
β	0,81	0,04	$-0{,}64$	$-0{,}21$				

- Sumas de cuadrados
- SCE(A) $= 0{,}82365$
- SCE(B) $= 3{,}3053$
- SCT $= 8{,}6892$
- SCR $= 4{,}5603$

continúa

Tabla ANOVA

Variación	S. C.	g. l.	Var.	F	$F(0{,}05)$	p-val
Factor A	$0{,}82365$	2	$0{,}4118$	$0{,}5418$	$5{,}1433$	$0{,}6077$
Factor B	$3{,}3053$	3	$1{,}1018$	$1{,}4496$	$4{,}7571$	$0{,}3190$
Error	$4{,}5603$	6	$0{,}7600$			
Total	$8{,}6892$	11				

Conclusión: al nivel de significación $\alpha = 0{,}05$ no se puede afirmar que ninguno de los factores influya en la media.

Análisis *post-hoc*

Si se rechaza la hipótesis nula de igualdad de medias $(\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0)$ se analizarán dos a dos las medias que se crea oportuno comparar.

$\mathrm{H}_0 \equiv \alpha_{i_1} = \alpha_{i_2}$

El contraste puede decidirse por medio del intervalo de confianza para la diferencia de las medias:

$$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}) = \left(\bar{y}_{i_1\cdot} - \bar{y}_{i_2\cdot} \pm t_{(I-1)(J-1);\alpha/2} \cdot S_R\sqrt{2/J}\right)$$

Se rechaza H_0 cuando $0 \notin \mathrm{IC}_{1-\alpha}$.

Análisis *post-hoc*

De igual forma, si se ha rechazado $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0$, pueden platearse contrastes

$$\mathsf{H}_0 \equiv \beta_{j_1} = \beta_{j_2}$$

para los pares (j_1, j_2) que interesen. Se decide mediante el intervalo

$$\mathsf{IC}_{1-\alpha}(\beta_{j_1} - \beta_{j_2}) = \left(\bar{y}_{j_1\cdot} - \bar{y}_{j_2\cdot} \pm t_{(I-1)(J-1);\alpha/2} \cdot S_R\sqrt{2/I}\right)$$

Método de Bonferroni

Si se plantean conjuntamente, con nivel de significación α_T, c contrastes entre pares (i_1, i_2) de niveles del factor A, cada contraste particular se realiza a un nivel de significación $\alpha = \alpha_T/c$.

Si se contrastan todos los pares posibles,

$$c = \frac{I(I-1)}{2}.$$

Ejemplo: máquinas desaladoras

Al haber rechazado la hipótesis $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$, se plantean los 10 contrastes $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2}$ al nivel de significación conjunto $\alpha_T = 0{,}05$.

- Cada contraste particular se hará al nivel de significación $\alpha = 0{,}005$
- Se calula el término: $t_{8;0{,}0025}\sqrt{0{,}58 \cdot 2/3} = 2{,}38$ $(t_{8;0{,}0025} = 3{,}83)$
- Se calculan las diferencias $\bar{y}_{i_1 \cdot} - \bar{y}_{i_2 \cdot}$
- Cuando estas diferencias son (en valor absoluto) mayores que $2{,}38$ se rechaza la igualdad de las medias

Tablas Bonferroni de SPSS

Comparaciones múltiples

Variable dependiente: EMISIONES
Bonferroni

(I) Calidad del agua (bloque)	(J) Calidad del agua (bloque)	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.	Significación	Intervalo de confianza al 85%. Límite inferior	Límite superior
Poca sal	Poca sal					
	Bastante sal	-2,0000*	,48305	,010	-3,1139	-,8861
	Mucha sal	-4,0000*	,48305	,000	-5,1139	-2,8861
Bastante sal	Poca sal	2,0000*	,48305	,010	,8861	3,1139
	Bastante sal					
	Mucha sal	-2,0000*	,48305	,010	-3,1139	-,8861
Mucha sal	Poca sal	4,0000*	,48305	,000	2,8861	5,1139
	Bastante sal	2,0000*	,48305	,010	,8861	3,1139
	Mucha sal					

Basado en las medias observadas.

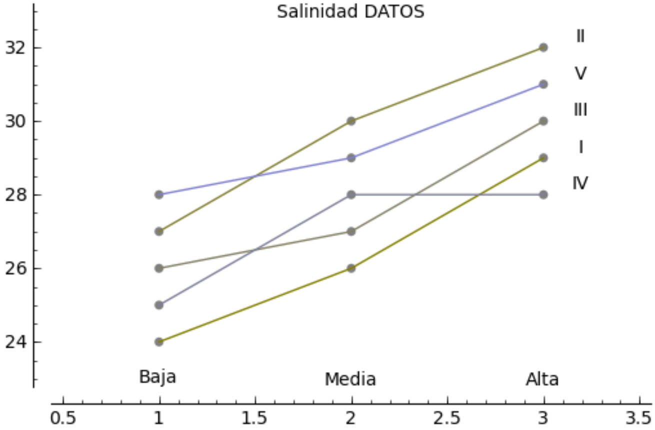
*. La diferencia de medias es significativa al nivel ,15.

Comparaciones múltiples

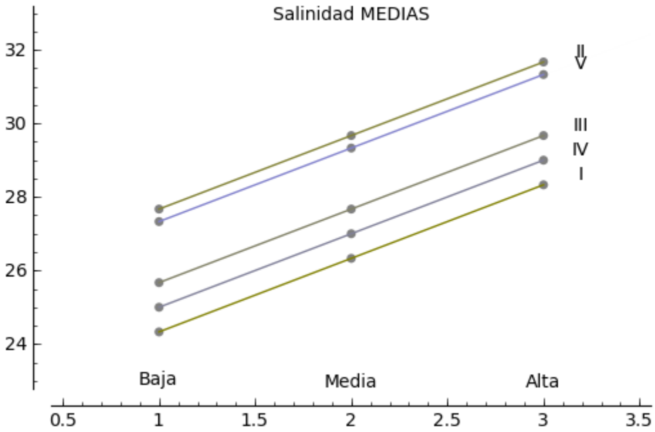
Variable dependiente: EMISIONES
Bonferroni

(I) Máquina (factor)	(J) Máquina (factor)	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.	Significación	Intervalo de confianza al 95%. Límite inferior	Límite superior
Máquina I	Máquina I					
	Máquina II	-3,3333*	,62361	,007	-5,7233	-,9433
	Máquina III	-1,3333	,62361	,650	-3,7233	1,0567
	Máquina IV	-,6667	,62361	1,000	-3,0567	1,7233
	Máquina V	-3,0000*	,62361	,013	-5,3900	-,6100
Máquina II	Máquina I	3,3333*	,62361	,007	,9433	5,7233
	Máquina II					
	Máquina III	2,0000	,62361	,125	-,3900	4,3900
	Máquina IV	2,6667*	,62361	,027	,2767	5,0567
	Máquina V	,3333	,62361	1,000	-2,0567	2,7233
Máquina III	Máquina I	1,3333	,62361	,650	-1,0567	3,7233
	Máquina II	-2,0000	,62361	,125	-4,3900	,3900
	Máquina III					
	Máquina IV	,6667	,62361	1,000	-1,7233	3,0567
	Máquina V	-1,6667	,62361	,282	-4,0567	,7233
Máquina IV	Máquina I	,6667	,62361	1,000	-1,7233	3,0567
	Máquina II	-2,6667*	,62361	,027	-5,0567	-,2767
	Máquina III	-,6667	,62361	1,000	-3,0567	1,7233
	Máquina IV					
	Máquina V	-2,3333	,62361	,057	-4,7233	,0567
Máquina V	Máquina I	3,0000*	,62361	,013	,6100	5,3900
	Máquina II	-,3333	,62361	1,000	-2,7233	2,0567
	Máquina III	1,6667	,62361	,282	-,7233	4,0567
	Máquina IV	2,3333	,62361	,057	-,0567	4,7233
	Máquina V					

Gráfica de los DATOS



Gráfica de las MEDIAS



Interacción

En los datos que siguen, se recogen los tiempos de remisión (en minutos) de un cierto tipo de cefalea bajo tratamiento con dos analgésicos.

Para cada analgésico se codifican por 0 y 1 el no suministrar o suministrar una dosis del analgésico.

La tabla de la derecha recoge las medias para cada uno de los grupos. Se observa que aparentemente cada analgésico por separado reduce la media unos 55 a 60 minutos. Sin embargo el suministrar conjuntamente los dos analgésicos no parece mejorar el efecto.

Cefalea, datos y medias

Datos

		Analgésico II	
		0	1
Analgésico I	0	73	24
		68	23
		112	20
		97	36
	1	49	20
		26	49
		26	27
		32	30

Medias

Analgésico II		
0	1	
87,50	25,75	56,625
33,25	31,50	32,375
60,35	28,625	44,500

ANOVA de dos factores con interacción

Al estudiar la influencia en una variable de los distintos niveles de dos factores podemos encontrarnos con el fenómeno que se conoce como interacción entre los factores. En la literatura se encuentra también la expresión sinergia.

Los efectos aditivos de cada uno de los niveles de los factores sobre la media se ven incrementados (o decrementados) por la intervención conjunta de ambos factores.

Ejemplo

Efecto combinado de medicamentos

Si el efecto de pasar de la dosis A_1 a la dosis A_2 de un medicamento se ha estimado en un decremento de la presión arterial a_{12} y el efecto de pasar de la dosis B_1 a la dosis B_2 de un segundo medicamento se ha estimado en un decremento de la presión arterial b_{12}.

Con efectos totalmente aditivos al pasar de una dosis combinada A_1B_1 a una dosis combinada A_2B_2 el decremento en la presión arterial sería de $a_{12} + b_{12}$.

Sin embargo, en general esto no tiene por qué ser así: habrá una interacción entre los niveles de los factores y la reducción real será de la forma $a_{12} + b_{12} + ab_{(12)(12)}$.

Diseño

Para detectar la interacción se necesita más de un resultado por cada combinación de niveles: Si tenemos i niveles del factor A, y J niveles del factor B realizaremos K experimentos para cada par (i, j), $i \in i$, $j \in J$. Diremos que tenemos K réplicas.

Descomposición de la media

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + U_{ijk}$$

Con las ligaduras siguientes:

$$\sum_{i \in i} \alpha_i = 0\,; \qquad \sum_{j \in J} \beta_j = 0\,;$$

$$\forall j \in J, \sum_{i \in i} (\alpha\beta)_{ij} = 0\,; \qquad \forall i \in i, \sum_{j \in J} (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

Datos

Niveles	1	2	$\dots$	j	$\dots$	J	Media
	Y_{111}	Y_{121}	$\dots$	Y_{1j1}	$\dots$	Y_{1J1}	
1	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\bar{Y}_{1..}$
	Y_{11K}	Y_{12K}	$\dots$	Y_{1jK}	$\dots$	Y_{1JK}	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	Y_{ij1}	$\dots$	$\dots$	
i	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\bar{Y}_{i..}$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	Y_{ijK}	$\dots$	$\dots$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	Y_{i11}	Y_{i21}	$\dots$	Y_{ij1}	$\dots$	Y_{iJ1}	
I	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\bar{Y}_{i..}$
	Y_{i1K}	Y_{i2K}	$\dots$	Y_{ijK}	$\dots$	Y_{iJK}	
Media	$\bar{Y}_{.1.}$	$\bar{Y}_{.2.}$	$\dots$	$\bar{Y}_{.j.}$	$\dots$	$\bar{Y}_{.J.}$	$\bar{Y}_{...}$

Hipótesis del modelo

- **Normalidad:** Las variables Y_{ijk} tienen distribución normal.
- **Homocedasticidad:** La varianza de Y_{ijk} es la misma para cada (i, j, k).
- **Linealidad:** La variable se descompone aditivamente.
- **Independencia:** Las variables Y_{ijk} son independientes.

Estas hipótesis se pueden resumir mediante $U_{ijk} \sim \mathsf{N}(0, \sigma)$.

Parámetros

Parámetros del modelo

$$\mu, \alpha_1, \cdots, \alpha_i, \beta_1, \cdots, \beta_J, (\alpha\beta)_{11}, \cdots, (\alpha\beta)_{iJ}, \sigma$$

El número de parámetros independientes es de $iJ + 1$:

μ	1 parámetro
α_i	$i - 1$ parámetros
β_j	$J - 1$ parámetros
$(\alpha\beta)_{ij}$	$(i-1)(J-1)$ parámetros
σ^2	1 parámetro

Notación:

$$
\begin{aligned}
\bar{y}_{\cdots} &= \frac{1}{iJK}\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk} \\
\bar{y}_{i\cdot\cdot} &= \frac{1}{JK}\sum_j\sum_k y_{ijk} \\
\bar{y}_{\cdot j\cdot} &= \frac{1}{iK}\sum_i\sum_k y_{ijk} \\
\bar{y}_{ij\cdot} &= \frac{1}{K}\sum_k y_{ijk}
\end{aligned}
$$

Estimaciones

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \bar{y}_{...} \\
\hat{\alpha}_i &= \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...} \\
\hat{\beta}_j &= \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...} \\
(\hat{\alpha\beta})_{ij} &= \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...} \\
&= \bar{y}_{ij.} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \hat{\mu} \\
\hat{\sigma}^2 &= S_R^2 = \frac{1}{iJ(K-1)} \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2
\end{aligned}
$$

ANOVA

Sumas de cuadrados

$$\text{SCE(A)} = JK\sum_i \hat{\alpha}_i^2$$

$$\text{SCE(B)} = IK\sum_j \hat{\beta}_i^2$$

$$\text{SCE(AB)} = K\sum_i\sum_j (\hat{\alpha\beta})_{ij}^2$$

$$\text{SCR} = \sum_i\sum_j\sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})^2$$

$$\text{SCT} = \sum_i\sum_j\sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{\cdots})^2$$

Contrastes:

Interacción

$$\mathsf{H}_0 \equiv \forall i, \forall j,\ (\alpha\beta)_{ij} = 0$$
$$\mathsf{H}_1 \equiv \exists i, j : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$$

Estadístico de contraste:

$$F_{AB} = \frac{\mathsf{SCE(AB)}/(I-1)(J-1)}{\mathsf{SCR}/IJ(K-1)} \qquad \left(\sim F_{(I-1)(J-1),IJ(K-1)}\right)$$

Contrastes: Efectos principales

Inluencia del factor A

$$\mathsf{H}_0 \equiv \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0$$
$$\mathsf{H}_1 \equiv \exists i : \alpha_i \neq 0$$

Estadístico de contraste: $\quad F_A = \dfrac{\mathsf{SCE(A)}/(I-1)}{\mathsf{SCR}/IJ(K-1)} \quad \big(\sim F_{I-1,IJ(K-1)}\big)$

Inluencia del factor B

$$\mathsf{H}_0 \equiv \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0$$
$$\mathsf{H}_1 \equiv \exists j : \beta_j \neq 0$$

Estadístico de contraste: $\quad F_B = \dfrac{\mathsf{SCE(B)}/(J-1)}{\mathsf{SCR}/IJ(K-1)} \quad \big(\sim F_{J-1,IJ(K-1)}\big)$

Tabla ANOVA

Fuente	Suma de C.	g.l.	Varianza	F	p-val
Factor A	SCE(A)	$I-1$	SCE(A)$/(I-1)$	F_A	p_A
Factor B	SCE(B)	$J-1$	SCE(B)$/(J-1)$	F_B	p_B
Interacción	SCE(AB)	$(I-1)(J-1)$	SCE(AB)$/(I-1)(J-1)$	F_{AB}	p_{AB}
Residual	SCR	$IJ(K-1)$	SCR$/IJ(K-1)$		
Total	SCT	$IJK-1$			

Observación: Conviene atender primero al valor p_{AB}. Si este es significativamente pequeño, podemos dar por terminado el análisis: afirmamos que los dos factores influyen en la media ya que hay interacción entre los factores y entonces, por lo general, no tendrá sentido comparar los efectos principales.

Ejemplo. Tratamiento de cefaleas

En los datos que siguen, se recogen los tiempos de remisión (en minutos) de un cierto tipo de cefalea bajo tratamiento con dos analgésicos.
Para cada analgésico se codifican por 0 y 1 el no suministrar o suministrar una dosis del analgésico.
La parte central recoge las medias para cada una de las distintas agrupaciones.
Se observa que aparentemente cada analgésico por separado reduce la media unos 55 a 60 minutos.
Sin embargo el suministrar conjuntamente los dos analgésicos no parece mejorar el efecto.

Los datos

Analgésico I	Analgésico II 0	Analgésico II 1	Medias 0	Medias 1	Medias ··	Residuos 0	Residuos 1
0	73	24	87,50	25,75	56,625	−14,5	−1,75
	68	23				−19,5	−2,75
	112	20				24,5	−5,75
	97	36				9,50	10,25
1	49	20	33,25	31,50	32,375	15,75	−11,5
	26	49				−7,25	17,50
	26	27				−7,25	−4,50
	32	30				−1,25	−1,50
··			60,375	28,625	44,500		

Alfas, Betas, Alfabetas

	$(\alpha\beta)_{ij}$		α_i
	15,000	−15,000	12,125
	−15,000	15,000	−12,125
β_j	15,875	−15,875	

Sumas de cuadrados

Los valores de I, J, K son, respectivamente, $2, 2, 4$.
De esta forma las sumas de cuadrados se han calculado mediante:

$$\text{SCE(I)}{=}2{\times}4\Big(12{,}125^2{+}(-12{,}125)^2\Big){=}2352{,}2$$

$$\text{SCE(II)}{=}2{\times}4\Big(15{,}875^2{+}(-15{,}875)^2\Big){=}4032{,}2$$

$$\text{SCE(I}{\times}\text{II)}{=}4\Big(15{,}000^2{+}(-15{,}000)^2{+}(-15{,}000)^2{+}15{,}000^2\Big){=}3600{,}0$$

$$\text{SCR}{=}\Big((-14{,}5)^2{+}\cdots{+}9{,}5^2\Big){+}\cdots{+}\Big((-11{,}5)^2{+}\cdots{+}(-1{,}5)^2\Big){=}2245{,}5$$

$$\text{SCT}{=}\Big[(73^2{+}68^2{+}112^2{+}97^2){+}(24^2{+}\dots){+}\cdots{+}(20^2{+}\cdots{+}30^2)\Big]{-}16{\cdot}44{,}500^2{=}12\,230{,}0$$

Ejemplo: tabla ANOVA

	SC	gl	Var	F	$F_{0,05}$	p-val
SCE(I)	$2\,352{,}2$	1	$2\,352{,}2$	$12{,}6$	$4{,}75$	$0{,}0040$
SCE(II)	$4\,032{,}2$	1	$4\,032{,}2$	$21{,}5$	$4{,}75$	$0{,}0006$
SCE(I $\times$ II)	$3\,600{,}0$	1	$3\,600{,}0$	$19{,}2$	$4{,}75$	$0{,}0009$
SCR	$2\,245{,}5$	12	$187{,}1$			
SCT	$12\,230{,}0$	15				

El p-valor $0{,}0009$ nos permite rechazar la hipótesis nula de no interacción entre los factores $\forall i, j \quad (\alpha\beta)_{ij} = 0$.

Por tanto, afirmamos que respecto del tiempo de remisión de la cefalea, los dos analgésicos interactúan.

Análisis *post-hoc*

Si en el contraste ANOVA se rechaza la igualdad de medias para los distintos niveles del primer factor, haremos contrates a fin de determinar para qué pares de medias podemos considerar que estas son distintas. Utilizamos de nuevo el método de Bonferroni. En este caso los intervalos de confianza para diferencias de las medias son:

Para el factor A

$$\mathsf{IC}_{1-\alpha}(\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}) = \left(\bar{y}_{i_1\cdot\cdot} - \bar{y}_{i_2\cdot\cdot} \pm t_{IJ(K-1);\alpha/2} \cdot S_R \sqrt{2\frac{1}{JK}}\right)$$

Para el factor B

$$\mathsf{IC}_{1-\alpha}(\beta_{j_1} - \beta_{j_2}) = \left(\bar{y}_{\cdot j_1 \cdot} - \bar{y}_{\cdot j_2 \cdot} \pm t_{IJ(K-1);\alpha/2} \cdot S_R \sqrt{2\frac{1}{IK}}\right)$$

Ejemplo (Eysenck - 1974). Estudio sobre la memoria verbal

Se seleccionaron al azar 50 personas mayores y 50 jóvenes (factor 1: edad).
Cada grupo de edad se dividió al azar en 5 subgrupos de 10 personas. Todos los individuos recibieron una lista de 27 palabras. Cada subgrupo (numerados del 1 al 5) recibió las siguientes instrucciones (factor 2: método)

- 1 contar el nº de letras de cada palabra
- 2 rimar cada palabra con otra
- 3 (adjetivar): asignar a cada palabra un adjetivo
- 4 (imaginar): asignar una imagen a cada palabra
- 5 (recordar): memorizar las palabras

A los 4 primeros subgrupos no se les dijo que deberían recordar las palabras. Finalmente, tras revisar la lista 3 veces, se recogió el nº de palabras recordadas por cada individuo (variable respuesta).

Datos

		Factor 2 Método				
		Contar	Rimar	Adjetivar	Imaginar	Recordar
Factor 1 Edad	Mayores	9	7	11	12	10
		8	9	13	11	19
		6	6	8	16	14
		8	6	6	11	5
		10	6	14	9	10
		4	11	11	23	11
		6	6	13	12	14
		5	3	13	10	15
		7	8	10	19	11
		7	7	11	11	11
	Jóvenes	8	10	14	20	21
		6	7	11	16	19
		4	8	18	16	17
		6	10	14	15	15
		7	4	13	18	22
		6	7	22	16	16
		5	10	17	20	22
		7	6	16	22	22
		9	7	12	14	18
		7	7	11	19	21

Descriptivos

Estadísticos descriptivos

Variable dependiente: palabras recordadas

edad	método	Media	Desv. típ.	N
mayores	contar	7,00	1,826	10
	rimar	6,90	2,132	10
	adjetivar	11,00	2,494	10
	imaginar	13,40	4,502	10
	recordar	12,00	3,742	10
	Total	10,06	4,007	50
jóvenes	contar	6,50	1,434	10
	rimar	7,60	1,955	10
	adjetivar	14,80	3,490	10
	imaginar	17,60	2,591	10
	recordar	19,30	2,669	10
	Total	13,16	5,787	50
Total	contar	6,75	1,618	20
	rimar	7,25	2,023	20
	adjetivar	12,90	3,538	20
	imaginar	15,50	4,174	20
	recordar	15,65	4,902	20
	Total	11,61	5,191	100

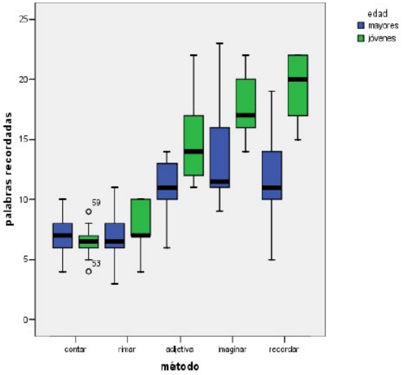


Tabla ANOVA

ANÁLISIS DE VARIANZA					
Origen de las variaciones	*Suma de cuadrados*	*g.l.*	*Promedio de los cuadrados*	*F*	*p-valor*
Edad	240,25	1	240,25	29,94	3,9814E-07
Método	1514,94	4	378,74	47,19	2,5301E-21
Interacción	190,3	4	47,58	5,93	0,00027927
Error	722,3	90	8,03		
Total	2667,79	99			

Grupos de edad separados

Jóvenes

ANOVA

palabras recordadas

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	1353,720	4	338,430	53,064	,000
Intra-grupos	287,000	45	6,378		
Total	1640,720	49			

Grupos de edad separados

Adultos

ANOVA

palabras recordadas

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	351,520	4	87,880	9,085	,000
Intra-grupos	435,300	45	9,673		
Total	786,820	49			

Bonferroni - jóvenes

Comparaciones múltiples

Variable dependiente: palabras recordadas
Bonferroni

(I) metjov	(J) metjov	Diferencia de medias (I-J)	Error típico	Sig.	Intervalo de confianza al 95% Límite inferior	Límite superior
contar	rimar	-1,100	1,129	1,000	-4,43	2,23
	adjetivar	-8,300*	1,129	,000	-11,63	-4,97
	imaginar	-11,100*	1,129	,000	-14,43	-7,77
	recordar	-12,800*	1,129	,000	-16,13	-9,47
rimar	contar	1,100	1,129	1,000	-2,23	4,43
	adjetivar	-7,200*	1,129	,000	-10,53	-3,87
	imaginar	-10,000*	1,129	,000	-13,33	-6,67
	recordar	-11,700*	1,129	,000	-15,03	-8,37
adjetivar	contar	8,300*	1,129	,000	4,97	11,63
	rimar	7,200*	1,129	,000	3,87	10,53
	imaginar	-2,800	1,129	,170	-6,13	,53
	recordar	-4,500*	1,129	,002	-7,83	-1,17
imaginar	contar	11,100*	1,129	,000	7,77	14,43
	rimar	10,000*	1,129	,000	6,67	13,33
	adjetivar	2,800	1,129	,170	-,53	6,13
	recordar	-1,700	1,129	1,000	-5,03	1,63
recordar	contar	12,800*	1,129	,000	9,47	16,13
	rimar	11,700*	1,129	,000	8,37	15,03
	adjetivar	4,500*	1,129	,002	1,17	7,83
	imaginar	1,700	1,129	1,000	-1,63	5,03

*. La diferencia de medias es significativa al nivel .05.

Bonferroni - adultos

Comparaciones múltiples

Variable dependiente: palabras recordadas

Bonferroni

(I) metmay	(J) metmay	Diferencia de medias (I-J)	Error típico	Sig.	Intervalo de confianza al 95%	
					Límite inferior	Límite superior
contar	rimar	,100	1,391	1,000	-4,01	4,21
	adjetivar	-4,000	1,391	,061	-8,11	,11
	imaginar	-6,400*	1,391	,000	-10,51	-2,29
	recordar	-5,000*	1,391	,008	-9,11	-,89
rimar	contar	-,100	1,391	1,000	-4,21	4,01
	adjetivar	-4,100	1,391	,051	-8,21	,01
	imaginar	-6,500*	1,391	,000	-10,61	-2,39
	recordar	-5,100*	1,391	,006	-9,21	-,99
adjetivar	contar	4,000	1,391	,061	-,11	8,11
	rimar	4,100	1,391	,051	-,01	8,21
	imaginar	-2,400	1,391	,913	-6,51	1,71
	recordar	-1,000	1,391	1,000	-5,11	3,11
imaginar	contar	6,400*	1,391	,000	2,29	10,51
	rimar	6,500*	1,391	,000	2,39	10,61
	adjetivar	2,400	1,391	,913	-1,71	6,51
	recordar	1,400	1,391	1,000	-2,71	5,51
recordar	contar	5,000*	1,391	,008	,89	9,11
	rimar	5,100*	1,391	,006	,99	9,21
	adjetivar	1,000	1,391	1,000	-3,11	5,11
	imaginar	-1,400	1,391	1,000	-5,51	2,71

*. La diferencia de medias es significativa al nivel .05.

ANOVA con tres factores

Modelo general: factores $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$.

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta_{ij}) + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + U_{ijk}$$

$i = 1, \ldots, I; \quad j = 1, \ldots, J; \quad k = 1, \ldots, K$

Si los experimentos tienen réplicas utilizaremos un cuarto índice l tanto para Y como para U.

El modelo puede simplificarse, por ejemplo eliminando los términos de interacción entre los tres factores.

Estudiaremos solamente un diseño más simple que denominamos cuadrado latino.

Cuadrados latinos

- El número de posibles combinaciones de niveles de los factores crece rápidamente con el número de estos.
- Si además se necesitan réplicas, el número total de experimentos será elevado.
- Puede recurrirse a un diseño que reduzca el número total de experimentos.
- El diseño de cuadrados latinos para tres factores se utiliza cuando el número de niveles I, J, K de cada uno de los factores es el mismo $(I = J = K)$ y no hay interacción entre ellos.
- El diseño permite tener un experimento por cada combinación de niveles de cualesquiera dos factores. En vez de realizar I^3 experimentos, se realizan I^2. Para $I = 4$, en vez de 64 se realizan únicamente 16 experimentos.

Un cuadrado latino

	1	2	3	4
I	a	b	c	d
II	b	c	d	a
III	c	d	a	b
IV	d	a	b	c

Un SUDOKU es un ejemplo de cuadrado latino 9×9 en el cual se pide una condición extra: los 9 subcuadrados 3×3 también tienen los 9 dígitos no nulos.

Elección del diseño

Asignación aleatoria de cuadrado latino y filas, columnas y letras a los niveles de los factores.

DISEÑO

A	B	C
B	C	A
C	A	B

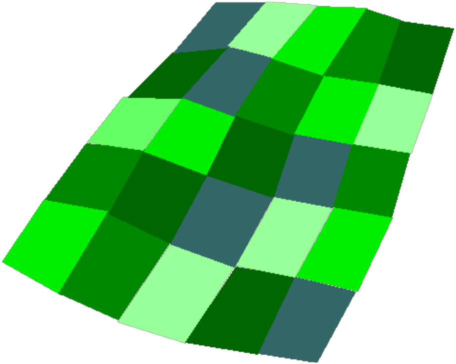
DATOS

$y_{11(1)}$	$y_{12(2)}$	$y_{13(3)}$
$y_{21(2)}$	$y_{22(3)}$	$y_{23(1)}$
$y_{31(3)}$	$y_{32(1)}$	$y_{33(2)}$

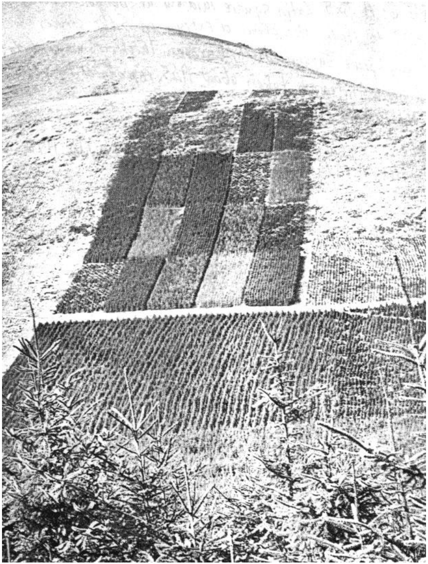
Para $I = 3$ el número total de diseños es de 12, pero crece rápidamente con I: para $I = 4$ el número total de diseños es de 576.

Origen del diseño. R. Fisher

Experimento agrícola con I tratamientos. Parcela rectangular dividida en $I \times I$ subparcelas. Cada tratamiento una vez por fila y por columna a fin de controlar efectos ocultos (iluminación, falta de homogeneidad del terreno, exposición a vientos, altitud,...). En la figura: cinco tratamientos representados por tonos de verde.



Ejemplo



Un experimento real

A 5 x 5 Latin square laid out at Bettgelert Forest in 1929 to study the effect of exposure on Sitka spruce, Norway spruce (Abetos), Japanese's larch (Alerce), *Pinus contorta* and Beech (Haya).

Photograph taken about 1945. Plate 6 from J. F. Box, *R. A. Fisher: The Life of a Scientist*; Wiley, New York 1978.

Ejemplo

Contraste de la eficacia de 5 fertilizantes en el cultivo de avena. Se aplican los 5 fertilizantes, se espera a que la avena madure; se recolecta y mide la producción por unidad de superficie para cada fertilizante. Se controla el experimento por la parcela en la que se utiliza cada abono. Incluso terrenos contiguos pueden variar en fertilidad debido a múltiples causas (diferencias de humedad, uso previo del terreno, orientación, etc.) Se parcela el terreno experimental en una retícula de 5 x 5 rectángulos y en cada uno se administra un fertilizante (etiquetados al azar A, B, C, D, E) según el siguiente diseño de cuadrado latino:

A	B	C	D	E
B	D	A	E	C
C	E	D	B	A
D	C	E	A	B
E	A	B	C	D

Modelo

$$Y_{ij(k)} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + U_{ij(k)}; \qquad U_{ij(k)} \sim \mathsf{N}(0, \sigma)$$

$$i = 1, \ldots, I \;; \quad j = 1, \ldots, I \;; \quad k = 1, \ldots, I$$

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = 0$$

Efecto fila: α_i; efecto columna: β_j; efecto «letra»: γ_k.

Parámetros

$\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_I, \beta_1, \ldots, \beta_I, \gamma_1, \ldots, \gamma_I, \sigma$

Número de parámetros libres: $3I - 1$.

Estimación de parámetros

Estimación

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{\cdot\cdot(\cdot)} = \frac{1}{I^2} \sum_i \sum_j y_{ij(k)}$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i\cdot(\cdot)} - \bar{y}_{\cdot\cdot(\cdot)} = \frac{1}{I} \sum_j y_{ij(k)} - \bar{y}_{\cdot\cdot(\cdot)}$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{\cdot j(\cdot)} - \bar{y}_{\cdot\cdot(\cdot)} = \frac{1}{I} \sum_i y_{ij(k)} - \bar{y}_{\cdot\cdot(\cdot)}$$

$$\hat{\gamma}_k = \bar{y}_{\cdot\cdot(k)} - \bar{y}_{\cdot\cdot(\cdot)} = \frac{1}{I} \sum_i y_{ij(k)} - \bar{y}_{\cdot\cdot(\cdot)}$$

Sumas de cuadrados

$$\text{SCE(A)} = I \cdot \sum \hat{\alpha}_i^2$$

$$\text{SCE(B)} = I \cdot \sum \hat{\beta}_j^2$$

$$\text{SCE}(\Gamma) = I \cdot \sum \hat{\gamma}_k^2$$

$$\text{SCR} = \sum_{ij} \left(y_{ij(k)} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \hat{\gamma}_k \right)^2$$

Tabla ANOVA

	S.C.	g.l.	Var	F
Efecto fila	SCE(A)	$I-1$	V_A=SCE(A)$/(I-1)$	V_A/S_R^2
Efecto columna	SCE(B)	$I-1$	V_B=SCE(B)$/(I-1)$	V_B/S_R^2
Efecto letra	SCE(Γ)	$I-1$	V_Γ=SCE(Γ)$/(I-1)$	V_Γ/S_R^2
Residual	SCR	$(I-1)(I-2)$	S_R^2 =SCR$/(I-1)$	

Contrastes

$$\mathrm{H}_0 \equiv \forall i,\ \alpha_i = 0; \quad \mathcal{R}_A = \left\{F_A > F_{I-1,(I-1)(I-2);\alpha}\right\}$$

$$\mathrm{H}_0 \equiv \forall j,\ \beta_j = 0; \quad \mathcal{R}_B = \left\{F_B > F_{I-1,(I-1)(I-2);\alpha}\right\}$$

$$\mathrm{H}_0 \equiv \forall k,\ \gamma_k = 0; \quad \mathcal{R}_\Gamma = \left\{F_\Gamma > F_{I-1,(I-1)(I-2);\alpha}\right\}$$

Ejemplo

Influencia de tres combustibles (a, b, c) en la emisión de óxidos de nitrógeno. Se controla el experimento por vehículo (I, II, III) y por conductor (1, 2, 3).
Datos y estimaciones:

	1	2	3	$\bar{y}_{i\cdot(\cdot)}$	$\hat{\alpha}_i$	
I	21 a	26 c	20 b	$22{,}33$	$2{,}33$	$\hat{\gamma}_1 = 21{,}00 - 20{,}00 = 1{,}00$
II	23 b	26 a	20 c	$23{,}00$	$3{,}00$	$\hat{\gamma}_2 = 18{,}67 - 20{,}00 = -1{,}33$
III	15 c	13 b	16 a	$14{,}67$	$-5{,}33$	$\hat{\gamma}_3 = 20{,}33 - 20{,}00 = 0{,}33$
$\bar{y}_{\cdot j(\cdot)}$	$19{,}67$	$21{,}67$	$18{,}67$	$\boxed{20{,}00}$		
$\hat{\beta}_j$	$-0{,}33$	$1{,}67$	$-1{,}33$			

Contraste

Anova

Variable dependiente: emisiones

Fuente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación
vehiculo	128,667	2	64,333	6,226	,138
conductor	14,000	2	7,000	,677	,596
combustible	8,667	2	4,333	,419	,705
Error	20,667	2	10,333		
Total	172,000	8			

Al nivel de significación $0{,}05$, no podemos afirmar que existan diferencias significativas en emisión de óxidos de nitrógeno en función de los niveles de los tres factores considerados (p-valores: $0{,}138$, $0{,}596$, $0{,}705$).

Diagnosis del modelo

Una vez realizado el análisis, se pueden estudiar las residuos obtenidos a fin de determinar si los requisitos previos del modelo son razonables.
El análisis se realiza de forma análoga al caso unifactorial.

- Análisis exploratorio de los residuos por medio de diagramas que permite ver si se alejan de alguno de los requisitos: normalidad (histograma, diagrama P-P) homocedasticidad (diagrama de dispersión por niveles).
- Contrastes de normalidad (por ejemplo, Kolmogorov-Smirnov) y contrastes de homocedasticidad (prueba de Levene) —estos contrastes podrán determinar que alguno de los requisitos **no** se cumple. Nunca se podrá afirmar categóricamente que los requisitos se cumplen.

Veamos los resultados que se obtienen en el ejemplo anterior de Eysenck.

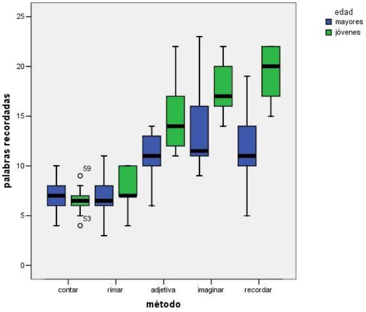
Ejemplo

Estadísticos descriptivos

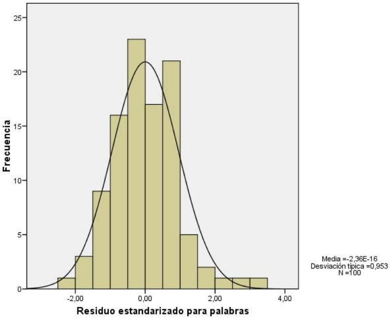
Variable dependiente: palabras recordadas

edad	método	Media	Desv. típ.	N
mayores	contar	7,00	1,826	10
	rimar	6,90	2,132	10
	adjetivar	11,00	2,494	10
	imaginar	13,40	4,502	10
	recordar	12,00	3,742	10
	Total	10,06	4,007	50
jóvenes	contar	6,50	1,434	10
	rimar	7,60	1,955	10
	adjetivar	14,80	3,490	10
	imaginar	17,60	2,591	10
	recordar	19,30	2,669	10
	Total	13,16	5,787	50
Total	contar	6,75	1,618	20
	rimar	7,25	2,023	20
	adjetivar	12,90	3,538	20
	imaginar	15,50	4,174	20
	recordar	15,65	4,902	20
	Total	11,61	5,191	100

Diagrama de cajas



Ejemplo



Frecuencia
Residuo estandarizado para palabras
Media =-2,36E-16
Desviación típica =0,953
N =100

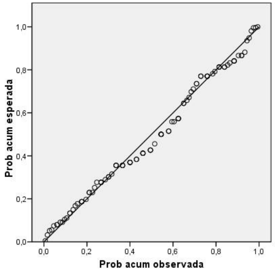


Gráfico P-P Normal de Residuo estandarizado para palabras
Prob acum esperada
Prob acum observada

t