

- 1) Sea $X = \cup_{i \in I} A_i$ una **partición** de X ; es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Demostrar que la relación

$$x \mathcal{R} y \iff x \text{ e } y \text{ pertenecen al mismo } A_i,$$

es una relación de equivalencia X . Recíprocamente, probar que dada una relación de equivalencia sobre un conjunto X , las clases de equivalencia definen una partición de X .

En definitiva, podemos pensar siempre una relación de equivalencia como una partición.

- 2) Si $f : X \rightarrow V$ es una **función**, probar que

$$x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$$

define una relación de equivalencia en X , y que cada una de sus clases de equivalencia es la imagen inversa de un $z \in V$. Establecer una biyección entre el conjunto cociente X/\mathcal{R} e $Im(f)$.

- 3) Fijado un entero positivo n , definimos $n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$ y consideramos la relación sobre \mathbb{Z} dada por:

$$m \mathcal{R} k \iff m - k \in n\mathbb{Z}.$$

- Demstrar que es una relación de equivalencia.
 - Describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente. Al conjunto cociente de esta relación lo denotamos por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- 4) Es habitual y más cómodo utilizar la notación \mathbb{Z}_n para referirse a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Indicar cuáles de las siguientes funciones están bien definidas.
- $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(\bar{m}) = m$ (donde $\bar{m} \in \mathbb{Z}_n$ denota la clase del entero m).
 - $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad g(m) = \bar{m}$.
 - $G : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad G((\bar{m}, \bar{k})) = \overline{m + k}$.
 - $H : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad H((\bar{m}, \bar{k})) = \overline{mk}$.

- 5) Considerar la relación definida sobre el plano \mathbb{R}^2 por:

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \iff xy = x'y'.$$

Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir las clases de equivalencia.

- 6) Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación

$$(n, m) \mathcal{R} (n', m') \iff \max\{n, m\} = \max\{n', m'\}.$$

- Demuestra que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
 - Describe la clase de equivalencia del elemento $(2, 2)$.
 - Describe el conjunto cociente.
 - ¿Tienen todas las clases de equivalencia el mismo cardinal? ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?
- 7) Sea F el conjunto de todas las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} . En F se define la siguiente relación:
- $$f \mathcal{R} g \iff \text{existe } r \in \mathbb{R}, r > 0 \text{ tal que } f(x) = g(x) \text{ para } |x| < r.$$
- Demstrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia sobre F .

8) Considerar las relaciones en \mathbb{Z} definidas por:

$$m\mathcal{R}_1n \iff 5|(m+2n)$$

$$m\mathcal{R}_2n \iff 4|(9m+3n)$$

donde $k|\ell$ significa “ k divide a ℓ ”.

a) Decidir si \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son relaciones de equivalencia.

b) En el caso de que lo sean, describir las clases de equivalencia y los conjuntos cocientes.

9) Sea B un subconjunto finito de un conjunto A . En $\mathcal{P}(A)$ definimos la relación:

$$X\mathcal{R}Y \iff \text{Card}(X \cap B) = \text{Card}(Y \cap B).$$

a) Demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.

b) Describir las clases de equivalencias y el conjunto cociente. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto cociente?

10) En $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ se define la siguiente relación:

$$X\mathcal{R}Y \iff \min X = \min Y.$$

a) Demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.

b) ¿Cuál es el cardinal de cada una de las clases de equivalencia?

c) ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

11) Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \subset B \subset C$ y A equipotente a C (i.e. $\text{Card}(A) = \text{Card}(C)$). Utilizando los resultados del curso, demostrar que los tres conjuntos son equipotentes (i.e. $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) = \text{Card}(C)$).

12) Definimos la siguiente relación en \mathbb{R} :

$$x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

Demostrar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántos elementos tiene cada clase de equivalencia? ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

13) Demostrar que el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, no es numerable.

14) Sea A un conjunto infinito. Demostrar que si $a_1, \dots, a_n \in A$ son elementos de A , el conjunto $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ es equipotente a A .

(Sugerencia: quitarles a A y a $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ subconjuntos numerables apropiados.)

15) Determinar el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

b) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$

c) $(-\pi/2, \pi/2)$ (Usar una función trigonométrica para establecer una biyección con \mathbb{R})

d) El intervalo $I = (0, 1)$ y más generalmente el intervalo (a, b)

e) $I \times I$ (Usar la escritura decimal para inyectar $I \times I$ en I)

f) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

g) El conjunto \mathbb{C} de los números complejos.

h) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (Usar la escritura decimal para comparar $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e I)

i) $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$

j) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ (Usar parte d))

k) Los intervalos $[a, b]$ y $[a, b)$ (Usar el ejercicio 14)

l) El conjunto de todas las raíces reales (rationales o no) de todos los polinomios con coeficientes racionales (a este conjunto se le llama “conjunto de los números algebraicos”).

m) El conjunto de todos los subconjuntos de \mathbb{N} que tienen dos elementos.

n) El conjunto de los números reales $x \in [0, 1)$ en cuyo desarrollo decimal no aparece el 9.