CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2017-2018. **HOJA 2.**

1) ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas? ¿Cuáles suprayectivas? ¿Es alguna de ellas biyectiva? (Empieza por asegurarte de que todas ellas son funciones, y entre los conjuntos que se indican).

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(m) = m + 2$;
b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(m) = 2m - 7$;
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^3$;
d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2 + 4x$;
e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n(n + 1)$;
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;
g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2 + n + 1$;
h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(t) = t/(t + 1)$.

2) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = |2x + 1/2| - 1/2$, hallar su imagen, y $f(\mathbb{Z})$. Demuestra que f no es ni sobreyectiva ni inyectiva. Probar que, sin embargo, sí da una biyección entre $\mathbb{Z}$ y su imagen.

3) Sea $f : X \to Y$ una función. Definimos para cada subconjunto $A \subset Y$ la imagen inversa:

$$f^{-1}(A) = \{ x \in X \mid f(x) \in A\}.$$

Dados subconjuntos $Z, W \subset Y$, demuestra que

a) $f^{-1}(Z \cup W) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W)$;
b) $f^{-1}(Z \cap W) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W)$;
c) $f(f^{-1}(Z)) = f(X) \cap Z$;
d) $X \setminus f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \setminus Z)$.

4) Estudiar si la siguiente función es inyectiva y/o sobreyectiva.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ A & \longrightarrow & f(A) = \{(n-1)/2 : (n \in A) \wedge (n \text{ es impar})\}. \end{array}$$

¿Quién es $f^{-1}(\varnothing)$?

5) Sean $f, g : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow P = \{primos\}$ dos funciones definidas por
$f(n) =$ el mayor primo que divide a n , y $g(n) =$ el menor primo que divide a n.
a) Decidir si son inyectivas y/o sobreyectivas.
b) ¿Quién es $f^{-1}(\{3\})$? ¿Quién es $g^{-1}(\{3\})$?

6) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Dibuja los gráficos de las funciones f, g, $g \circ f$ y $f \circ g$.
b) Encuentra las imágenes de cada una de las cuatro funciones anteriores y decide si son inyectivas y/o suprayectivas.

7) Dadas funciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, probar las siguientes afirmaciones:

a) f inyectiva y g inyectiva $\Rightarrow g \circ f$ inyectiva.
b) f sobre y g sobre $\Rightarrow g \circ f$ sobre.
c) Si falta alguna de las dos hipótesis en los casos anteriores, la conclusión puede ser falsa.
d) Si g es biyectiva, $g \circ f$ es inyectiva si y sólo si lo es f, y es sobre si y sólo si lo es f.
e) Si además $X = Z$, la afirmación del apartado anterior también es cierta para $f \circ g$.

8) Sean A y B dos conjuntos finitos de m y n elementos respectivamente.
a) Hallar el número de funciones $f : A \longrightarrow B$.
b) Hallar el número de funciones inyectivas $f : A \longrightarrow B$.

9) Sea X un conjunto finito con n elementos.
¿Cuántos subconjuntos tiene $X \times X$? ¿Cuántas funciones hay de X en $X \times X$?

10) Para todo $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$, el número combinatorio $\binom{n}{k}$ se define como el número de subconjuntos de k elementos en un conjunto X que tenga n elementos.
A partir de la definición, demuestra las siguientes propiedades de los números combinatorios:

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$; d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

es decir, el conjunto X tiene en total 2^n subconjuntos; e) $\sum_{k=l}^{n} \binom{k}{l} = \binom{n+1}{l+1}$.

11) Utilizar la definición de los números combinatorios $\binom{n}{k}$ para demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k .$$

Derivar k veces esa igualdad, y evaluarla en $x = 0$ para demostrar que se tiene la siguiente expresión algebraica para los números combinatorios:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Deducir la fórmula general del binomio de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} .$$

12) Utilizar el *principio de inclusión–exclusión* para responder:

(a) ¿Cuántos números naturales coprimos con 1000 hay entre 1 y 1000?

(b) ¿Cuántos números naturales coprimos con 360 hay entre 1 y 360?

13) En una reunión de 4 personas, cada uno ha venido con su paraguas y los han dejado en un paragüero. Al final de la reunión, cada persona escoge un paraguas de forma aleatoria.
a) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los paraguas de forma que ninguno se quede con el suyo?
b) Responder a la misma pregunta para el caso de n personas y n paraguas.

14) Demostrar que dados n enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, no necesariamente distintos, existen enteros k y l con $0 \leq k < l \leq n$ tales que la suma $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$ es un múltiplo de n.