**CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2017-2018.** **HOJA 1.**

**1)** Decir cuáles de las siguientes condiciones son *necesarias*, cuáles son *suficientes* y cuáles *son necesarias y suficientes* para que un número natural $n$ sea divisible por 6.

a) $n$ es divisible por 3;
b) $n$ es divisible por 12;
c) $n = 24$;
d) $n^2$ es divisible por 6;
e) $n$ es par y divisible por 3;
f) $n$ es par o divisible por 3.

**2)** Explica por qué son equivalentes las proposiciones: $S \vee (\neg R) \Rightarrow T$ , $(\neg T) \Rightarrow (\neg S) \wedge R$ , y confírmalo con la tabla de verdad de cada una de ellas.

**3)** En las siguientes proposiciones, $x$, $y$ son números reales. Traduce cada una de ellas a frases que no contengan ningún símbolo, sólo palabras. Explica cuáles son ciertas y escribe la negación de las que no lo sean.

a) $\forall x\, ((x > 0) \Rightarrow \exists y\, ((y > 0) \wedge (y^2 = x)))$
b) $\exists x\, \forall y\, ((y > x) \Rightarrow (y > 5))$
c) $\exists x\, (1 < x^2 < x)$
d) $\forall y\, \exists x\, ((x \in \mathbb{R}) \wedge (x^3 = y + 1))$

**4)** Traduce cada una de las siguientes afirmaciones a símbolos y cuantificadores. Las respuestas no deben contener palabras.

a) El número 5 tiene una raíz cuadrada positiva.
b) Todo número real positivo tiene dos raíces cuartas reales y distintas.

**5)** Razona con palabras por qué los siguientes pares de afirmaciones no son equivalentes en los números naturales, y explica cuáles de ellas son ciertas.

a) $\forall x\, \exists y\, (x = 2y \vee x = 2y + 1)$ y $\exists x\, \forall y\, (x = 2y \vee x = 2y + 1)$ .
b) $\exists x\, \forall y,\ x < y < x + 2$ y $\forall x\, \exists y,\ x < y < x + 2$ .

**6)** Son ciertas las siguientes afirmaciones en los números naturales? Escribir su negación.

a) $\forall x\, \exists y,\ y < x$
b) $\exists x\, \forall y,\ \forall z, x < z < y$

**7)** Demuestra por reducción al absurdo que $\log_3 1215$ es irracional.

**8)** Se llama *cuadrado perfecto* a un número de la forma $a^2$ donde $a$ es un número natural. Demuestra que si un número natural $n > 0$ es un cuadrado perfecto, entonces $n + 1$ no puede ser un cuadrado perfecto.

**9)** Halla una expresión para la suma de los primeros números naturales positivos: $1+2+\cdots+n$. Y otra para la suma de los $n$ primeros términos de la progresión aritmética: $a + kd,\ k = 0, 1, \ldots$

**10)** Halla la suma de las $n$ primeras potencias de $r$: $r^0 + r^1 + \cdots + r^{n-1}$. Halla una fórmula general para la suma de las $n$ primeros términos de una progresión geométrica $cr^k$, $k = 0, 1, \ldots$

**11)** Encuentra una fórmula para la suma de los ángulos interiores de un polígono de $n$ lados. *Indicación: recuerda que los ángulos de un triángulo suman* $\pi$ **radianes.**

**12)** Demostrar por inducción:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

b) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ , para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

c) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ , para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

**13)** a) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}, n > 2$, entonces $2^n > 1 + 2n$ .
b) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}, n > 4$, entonces $2^n > n^2 + 1$ .
c) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces el número $a_n = 4^n + 6n - 1$ es divisible por 9.
d) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces el número $b_n = 7^n - 4^n$ es divisible por 3.

**14)** Probar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.

**15)** Demostrar que todo número natural mayor que uno, es producto de números primos.

**16)** Probar que hay infinitos primos. Es decir, que hay más de $n$ primos distintos para todo $n \in \mathbb{N}$.

**17)** Demostrar que $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$ , para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

**18)** Demostrar, para todo $q \neq 1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, la igualdad

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2})\cdots(1+q^{2^n}) = \frac{q^{2^{n+1}}-1}{q-1}.$$

**19)** Supongamos que $A \subset B \subset C$. Determinar $A \setminus B, A \setminus C$ y $A \cup B$.

**20)** Probar las siguientes igualdades para conjuntos arbitrarios $S, T, U$ y $V$. *(Indicación: los diagramas de Venn pueden ser útiles para orientarse, pero la demostración no debe depender de ellos).*

a) $(S \setminus T) \cup (T \setminus S) = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$
b) $(S \setminus (T \cup U)) = (S \setminus T) \cap (S \setminus U)$
c) $(S \setminus (T \cap U)) = (S \setminus T) \cup (S \setminus U)$
d) $(S \setminus T) \times (U \setminus V) = (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$
e) $(S \cup T) \times V = (S \times V) \cup (T \times V)$

**21)** Dar una descripción explícita del conjunto $\mathcal{P}(S)$ de partes de $S = \{a, b, 1, 2\}$ .
Demostrar que $S \subset T$ si y sólo si $\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{P}(T)$. Concluir que $S = T$ si y sólo si $\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(T)$.

**22)** Probar, o demostrar que son falsas, las siguientes afirmaciones:

a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ ; b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ ; c) $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ .

**23)** Sean $A, B, C$ conjuntos dados tales que $B \subset A$. Describir en cada caso los conjuntos $X$ que satisfacen las ecuaciones:

**i)** $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$ , si sabemos que $A \subset C$. **ii)** $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$ , si sabemos que $A \cap C = \varnothing$ .