

Hoja 5: Ecuaciones diferenciales.

1.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

- (a) $\frac{dx}{dt} = \sqrt{3t+1}$, con $x = 1$ para $t = 0$.
- (b) $\frac{dx}{dt} = \frac{tx}{1+t^2}$, con $x = 1$ para $t = 0$.
- (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y^2 - 2y$, con $y = -3$ para $x = 0$.
- (d) $\frac{dy}{dx} = (y+1)e^{-x}$, con $y = 2$ para $x = 0$.
- (e) $\frac{dy}{dx} = x^2y^2$, con $y = 1$ para $x = 1$.

2.- La concentración de oxígeno $f(t)$ en un estanque contaminado con un residuo orgánico varía a lo largo del tiempo. La velocidad de variación viene dada por:

$$v(t) = \frac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)^2} \quad (t = \text{"tiempo en semanas"}).$$

- (a) Hallar la diferencia aproximada de concentración de oxígeno entre $t = 0$ y $t = 1$ utilizando la regla del trapecio con 4 subintervalos.
- (b) Comparar el resultado aproximado con el exacto, sabiendo que

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \text{ para } t \geq 0.$$

3.- El tamaño $N(t)$ de una población varía a lo largo del tiempo. Su velocidad de variación viene dada por:

$$v(t) = \frac{30e^{-0,1t}}{(1 + 3e^{-0,1t})^2} \quad (t = \text{"tiempo en años"}).$$

- (a) Calcular la variación de la población entre $t = 0$ y $t = 20$: obtener el resultado exacto y el resultado aproximado utilizando la regla del trapecio y la regla de Simpson con 2 subintervalos.
- (b) Si $N(0) = 25$. ¿cuál es el tamaño de la población al cabo de 20 años?

4.- Se observa que la velocidad de variación del número de individuos de una población viene dada por:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100}(x - 100)(200 - x) \quad \text{con } x(0) = 180.$$

- (a) Hallar la función $x(t)$.
- (b) Calcular en qué valor tiende a estabilizarse la población cuando el tiempo crece.

5.- Llamamos $x(t)$ a la proporción de individuos de una especie que existe en un instante t . Se sabe que la velocidad de crecimiento de x con respecto a t es proporcional a $x(1-x)$. Resolver la ecuación diferencial correspondiente. ¿A qué modelo de función corresponde?

6.- De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura $T(t)$ de un objeto introducido en un ambiente más frío con temperatura constante A grados varía a una velocidad proporcional a $T(t) - A$ (el exceso de temperatura). Un médico forense mide la temperatura de un cadáver que resulta ser 29,4 grados centígrados. Dos horas después vuelve a medirla y resulta ser 23'3 grados centígrados. Si la temperatura ambiente es 20 grados centígrados ¿Cuánto tiempo hace que murió la persona contando desde la primera medición?

7.- Un tanque contiene inicialmente 100 litros de agua con sal. El contenido total de sal es de 1 Kg. En un determinado momento, se comienza a sacar líquido del tanque, a razón de 3 litros por minuto (con lo cual, cada minuto, se pierde un 3 % de sal). Para que la cantidad total de líquido se mantenga constante, cada minuto se añaden 3 litros de otra solución salina cuyo contenido en sal es de 250 gramos por litro (con lo cual, cada minuto, se añaden 750 gr. de sal).

- (a) Hallar la cantidad de sal en el tanque, $S(t)$, en función del tiempo, a partir de la ecuación diferencial correspondiente.
- (b) Determinar el momento en que la solución del tanque contiene 13 Kg. de sal.
- (c) Calcular la cantidad de sal que habrá a largo plazo.

8.- Durante una epidemia de gripe en una población, la velocidad de propagación de la enfermedad, es decir, la velocidad de variación del número de enfermos es (aproximadamente): $v(t) = 1000 t e^{-0,5t}$ donde t es el número de días desde el inicio de la epidemia.

- (a) Utilizado la regla del trapecio con dos intervalos, calcula (aproximadamente) el número de individuos que se ponen enfermos durante los cuatro primeros días. Compara este valor con el valor exacto.
- (b) ¿En qué momento es máxima la velocidad de propagación de la gripe?

9.- La velocidad de variación de una población de bacterias con recursos limitados viene dada por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -2(x - 5),$$

donde x es el “número de bacterias (en millones)” y t es el “tiempo transcurrido (en horas)”. Inicialmente hay 1 millón de bacterias.

- (a) Hallar la función que expresa x en función de t , resolviendo la ecuación diferencial.
- (b) ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 2 horas? ¿Cuántas habrá a largo plazo?