CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2016-2017. **HOJA 7.**

1) Hallar el cociente $C(X)$ y el resto $R(X)$ que resultan de dividir el polinomio

$$P(X) = 3X^5 + 2X^3 + X + 1 \text{ entre el } Q(X) = 3X^2 + 1 .$$

Hallarlos primero en $\mathbb{Q}[X]$ y luego en $\mathbb{Z}_5[X]$.

2) Sean $P,\, Q \in \mathbb{Q}[X]$. Probar que P y Q son *coprimos* si y sólo si $P + Q$, $P \cdot Q$ también lo son.

3) Calcular el máximo común divisor $D(X)$ de los polinomios

$$P(X) = X^5 - 5X^3 + 4X \qquad \text{y} \qquad Q(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$$

Encontrar dos polinomios $A(X)$ y $B(X)$ tales que: $A(X) \cdot P(X) + B(X) \cdot Q(X) = D(X)$.

4) Encontrar polinomios $A(X)$ y $B(X)$ tales que: $A(X)(X^2 + 2X - 2) + B(X)(X^2 + X - 1) = 1$.

5) Hallar un polinomio $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $X^2 + 1$ divida a $P(X)$, y $X^3 + 1$ divida a $P(X) - 1$, siendo el grado de P el mínimo posible.

6) Hallar los ceros racionales del polinomio $P(X) = 20X^3 - 56X^2 + 33X + 9$

7) Hallar todos los ceros de $P(X) = X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 27X - 54$, con sus multiplicidades. Razonar y comprobar lo que esos ceros implican para el máximo común divisor de $P(X)$ y su derivada $P'(X)$.

8) Los números $2 + \sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, son, cada uno de ellos, cero de algún polinomio de $\mathbb{Z}[X]$. Hallar esos polinomios.

9) a) Demostrar que para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, existen infinitos polinomios irreducibles en $\mathbb{K}[X]$.
Sugerencia: recordar la prueba de Euclides de que hay en $\mathbb{Z}$ infinitos números primos.

b) Deducir que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo con un número finito de elementos (por ejemplo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ para p primo) habrá en $\mathbb{K}[X]$ polinomios irreducibles de grado arbitrariamente grande.

10) a) Para un producto de polinomios $(a_0 + \cdots + a_k X^k)(b_0 + \cdots + b_j X^j) = c_0 + \cdots + c_n X^n$, con coeficientes $\in \mathbb{Z}$ y grados $j, k < n$, probar por inducción que:
Si para un primo dado $p \in \mathbb{N}$, $p \nmid b_0$, pero $\forall i \le k$, $p \mid c_i$, entonces $\forall i$ se tiene $p \mid a_i$.

b) Deducir de a) el ***criterio de irreducibilidad de Eisenstein:***
Si para algún primo p se tiene $p \mid c_i$ para $i < n$, $p \nmid c_n$, $p^2 \nmid c_0$,
entonces el polinomio $c_0 + \cdots + c_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

c) Deducir que $\forall\, n > 1$ existen infinitos polinomios de grado n que son irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$.

d) Un ejemplo: descomponer $P(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2$ en factores irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$.

11) a) Probar que un polinomio $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ es irreducible si y solamente si es irreducible el polinomio $Q(X) = P(X + a)$ para cualquier $a \in \mathbb{K}$.

b) ¿Es reducible en $\mathbb{Q}[X]$ el polinomio $p(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 33$? Justificar la respuesta.

12) a) Determinar los polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{Z}_2[X]$ de grados $1, 2, 3$ y 4.

b) Demostrar que el polinomio $P(X) = X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 7X + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$

13) Descomponer el polinomio $p(X) = X^4 + 3X^2 + 4$ en sus factores irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{Z}_p[X]$, para $p = 2, 3, 5$ y 7.