CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2016-2017. **HOJA 6.**

1) Hallar la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:

$$a)\ \frac{1-i}{1+i} \qquad b)\ \frac{(3-i)(2+i)}{3+i} \qquad c)\ \frac{(2-i)^2}{(3-i)^2} \qquad d)\ \Big(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)^3$$

2) Expresar en forma polar:

$$a)\ 1+i \qquad b)\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad c)\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \qquad d)\ -2-2i$$

3) Calcular

$$a)\ \exp(2011\pi i) \qquad b)\ \exp(\pi i/2) \qquad c)\ \exp(\pi 3^{2011} i/2) \qquad d)\ \exp(-\pi i/4)$$

4) Hallar para qué numeros complejos z y w de módulo 1 se cumple $z+w=2$. ¿Cuándo se cumple $z+w=1$ con z y w de módulo 1?

5) Calcular las raíces cuadradas (complejas) de los números:

$$a)\ 1+i \qquad b)\ 2-i \qquad c)\ 8-6i \qquad d)\ -8-15i \qquad e)\ 15-8i$$

6) Calcular las raíces complejas de los siguientes polinomios cuadráticos:
a) $z^2+3iz-3+i$
b) $2z^2+4z+2+i$
c) $z^2+(2+3i)z-7/2-7i$
d) $z^2+(5+i)z+17i/4$

7) a) Demostrar la identidad

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\operatorname{sen}\big((N+\frac{1}{2})x\big)}{\operatorname{sen}(x/2)}$$

para x que no sea múltiplo entero de 2π.
Sugerencia: Es la suma parcial de una progresión geométrica.

b) Demostrar que para todo $x\in\mathbb{R}$ y para todo $N\in\mathbb{N}$, $\big|\operatorname{sen}(2N+1)x\big| \le (2N+1)\,\big|\operatorname{sen} x\big|$.

8) Utilizando las ideas del ejercicio anterior, demostrar que para todo $N\in\mathbb{N}$, $N>1$

$$\tan\Big(\frac{\pi}{2N}\Big)\sum_{n=1}^{N}\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi n}{N}\Big)=1.$$

9) Calcular los diferentes valores de:

$$a)\ \sqrt[3]{-8} \qquad b)\ \sqrt[3]{-i} \qquad c)\ \sqrt[4]{16i} \qquad d)\ (1+i)^n+(1-i)^n \text{ con } n\in\mathbb{N}$$

10) Dado $n>1$, demostrar que la suma de todas las raíces n-ésimas de 1 es cero.
Sugerencia: Comprobar que esa suma no cambia al multiplicar por cualquiera de ellas.

11) Sea $z=2e^{2\pi i/5}+1+2e^{-2\pi i/5}$. Utilizando que $\sum_{k=1}^{5} e^{2\pi k i/5}=0$ (por el problema anterior), probar que $z^2=5$. Deducir de ello una expresión para $\cos(2\pi/5)$, que utiliza sólo raíces cuadradas de números naturales.

12) a) Demostrar que si dos enteros positivos n y m son suma de dos cuadrados, entonces su producto también lo es. *Sugerencia:* $|x+iy|^2=x^2+y^2$.

b) Usando que $13=2^2+3^2$ y $29=2^2+5^2$, hallar $a,b\in\mathbb{N}$ tales que $377=a^2+b^2$.

13) Denotemos con $\mathrm{Im}(z)$ la parte imaginaria de z. Probar las fórmulas

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{c^2 + d^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{|z-i|^2}{\mathrm{Im}(z)} + 2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

para $z = (ai + b)/(ci + d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc = 1$.

14) a) Demostrar que la función $f(z) = (z - i)/(z + i)$ establece una biyección entre

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

b) Demostrar que la función $f(z) = (z - a)/(1 - \overline{a}z)$ con $a \in \mathbb{C}$ y $|a| < 1$ nos da una biyección de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$.