Hoja 7: Matrices y modelos de evolución

1. Resolver los siguientes sistemas usando el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$$

2. Realizar las siguientes multiplicaciones de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Realiza la siguientes multiplicaciones de matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} A; \qquad A \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A; \qquad A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Hallar la matrices inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Calcula la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Diagonalizar A y calcular A^n.

8. Hallar los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Hallar tres autovectores de A que sean linealmente independientes.

9. Las hembras de una población se pueden clasificar en dos grupos de edad (hembras jóvenes y hembras adultas). La matriz de Leslie que describe la evolución de esta población es la siguiente:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0,11 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Si inicialmente hay 100 hembras de cada clase, ¿cuántas habrá en el siguiente período de tiempo?
   b) A largo plazo, ¿cuál será la tasa de variación de cada uno de los grupos? ¿Se extinguirá la población? ¿Cuál será la proporción de hembras jóvenes y adultas?

10. Se lleva a cabo un estudio sobre una población de ballenas azules. Las hembras son clasificadas en cuatro grupos de edad, y sobre cada grupo se obtiene la siguiente información:

GRUPO DE EDAD:	0 a 3	4 a 7	8 a 11	12 a 15
NO. MEDIO DE CRÍAS:	0	0,63	1	0,90
MORTALIDAD:	43 %	43 %	43 %	100 %

Formular un modelo matricial para la evolución de esta población. Si en un determinado momento, la población está formada por 20, 30, 40 y 20 ballenas hembra de cada tipo de edad, ¿cuál será la composición de la población al cabo de dos períodos de tiempo?

11. La población de cierta especie de animales en un bosque está dividida en dos grupos de edad (jóvenes y adultos). La correspondiente matriz de Leslie es:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Interpreta el significado de cada uno de los elementos de la matriz anterior.
   b) Sea $N(t)$ el número de animales de cada grupo en la etapa t. Si en la etapa 0 hay únicamente 10 animales jóvenes en el bosque, calcula $N(1), N(2), N(3)$ y $N(4)$. A partir de $N(4)$ calcula la proporción exacta de individuos de cada grupo respecto al total de la población en la etapa 4.
   c) Calcula la misma proporción de forma aproximada mediante el autovector asociado al autovalor dominante, y compara el resultado obtenido en este apartado con el del apartado anterior.

12. Supongamos que

$$L = \begin{pmatrix} 0,8 & 1 \\ 0,6 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de una población de venados hembras, dividida en jóvenes y adultas.

   a) Demostrar que, a la larga, el tamaño de la población se multiplicará por un factor aproximado de 1.27 (es decir, crecerá un 27 %) cada generación. A largo plazo, ¿cuál será la proporción de jóvenes y adultas?
   b) Los granjeros y otras personas del área no quieren que la población crezca, y deciden poner en marcha una caza controlada. Si se decide cazar una proporción h de los venados jóvenes antes de que pasen a adultos, ¿cuál será ahora la matriz de transición?. Prueba que $h = 0{,}8$ es una caza demasiado intensiva.
   c) ¿Es posible seleccionar h de manera que la población de venados no crezca ni desaparezca?

13. Estudiamos una población de aves (hembras). Clasificamos en tres grupos de edad: jóvenes (de 0 a 1 año), medianas (de 1 a 2 años), y adultas (de 2 a 3 años). Sabemos que un 12 % de las jóvenes y un 54 % de las medianas sobreviven cada año. Ninguna de las adultas sobrevive. La descendencia de cada joven es 0,5 y la de cada mediana es 2 (hembras por año). Las adultas no tienen descendencia.

   a) Describir la evolución de la población en forma matricial.
   b) Transcurridos unos años, determina en qué tanto por ciento crecerá o decrecerá anualmente la población de hembras.
   c) Determina cuál debería ser el tanto por ciento de supervivencia de las hembras jóvenes para que la población se mantuviera estable.