Matemáticas Curso 2016-2017
1º del Grado en Bioquímica

Hoja 3: Modelos.

1.- El *modelo exponencial*

$$f(t) = N_0\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)^t = N_0 e^{t\log(1+\frac{\alpha}{100})} = N_0 e^{\beta t}$$

corresponde a un crecimiento (o decrecimiento) del tamaño de una población del $\alpha\,\%$ en cada unidad de tiempo, partiendo de un valor inicial de N_0 (en $t=0$).
(a) Representar las funciones $f(t)=100e^{2t}$ y $f(t)=100e^{-t}$.
(b) Si el crecimiento es de un $5\,\%$ por unidad de tiempo y $N_0=100$, ¿cuál es la velocidad de crecimiento de $f(t)$ en el instante $t=3$? ¿Y en $t=50$?

2.- La *función logarítmica*

$$f(x) = a + b\ \log x \qquad (\text{para } x>0)$$

se utiliza, por ejemplo, para describir empíricamente la relación entre la concentración (x) de una hormona de crecimiento para plantas y el tamaño alcanzado por la planta ($f(x)$).
(a) Representar la función $f(x)=100+2\log x$.
(b) Hallar la concentración x_0 para la cual $f'(x_0)=1$.¿Cómo varía el tamaño de la planta al incrementar o disminuir la concentración x_0 en pequeñas cantidades?

3.- Hace tiempo, los zoólogos encontraron que las medidas realizadas en dos partes diferentes del cuerpo (x e y) de individuos en crecimiento de una especie animal, se podían relacionar (aproximadamente) mediante la *(relación alométrica),*:

$$\log y = k + b\ \log x \qquad \text{o equivalentemente} \qquad y = e^k e^{b\log x} = ax^b, \qquad \text{para } x>0.$$

Representar las funciones $f(x)=2x^3$ y $f(x)=2x^{1/2}$.

4.- Una función muy utilizada para representar el tamaño de un cultivo de microbios a lo largo del tiempo es la *función logística*:

$$f(t) = \frac{k}{1+ae^{-bt}}, \qquad \text{para } t>0 \qquad (a,k,b>0)$$

(a) Representar la función para $k=100$, $a=2$ y $b=1$.
(b) Hallar el instante en que la velocidad de crecimiento es máxima.
(c) ¿En qué tamaño tiende a estabilizarse la población?

5.- En una reacción bioquímica controlada por una enzima, la velocidad (v) de conversión de una sustancia (para una cantidad fija de enzima) viene dada por

$$v = f(s) = \frac{as}{k+s}, \qquad \text{para } s>0 \qquad (a,k>0),$$

donde s es la concentración del sustrato que está siendo convertido. Esta función se conoce con el nombre de *función de Michaelis-Menten.*
(a) Representar la función.
(b) Hallar el límite cuando $s\to\infty$ de la velocidad de conversión y calcular cuál debe ser la concentración del sustrato para que la velocidad de conversión sea la mitad de este valor.

6.- El crecimiento de algunas especies de peces se puede modelar mediante la función de von Bertalanffy

$$L(x) = \ell(1-e^{-kx}), \quad x\geq 0,$$

siendo $L(x)$ la longitud a la edad x, con k y ℓ constantes positivas.
(a) Dibujar las gráficas de $L(x)$ cuando $\ell=1$ para (i) $k=1$, y (ii) $k=0,1$.
(b) Para $k=1$ obtener el valor de x para que la longitud sea el $90\,\%$ de ℓ.
(c) Comparar las gráficas de (a). ¿Cuál de las curvas de crecimiento alcanza el $90\,\%$ de ℓ mas rápido?

7.- Obsérvese que si se pierde un $50\,\%$, después hay que ganar un $100\,\%$ para volver a la situación original. Calcular qué porcentajes habría que perder para volver a la situación original después de ganar un: $25\,\%$, $300\,\%$, $50\,\%$.

8.- Un gas confinado en un depósito perforado, pierde una proporción fija de las moléculas por unidad de tiempo. A las 7 de la mañana medimos una concentración en el depósito de 15 *ppm* (partes por millón). Media hora más tarde la concentración ha bajado un 1 % respecto a la anterior.
(a) Escribir una función que exprese la concentración del gas en función del tiempo.
(b)¿Qué concentración había las $3:30$ de la mañana, antes de nuestra primera medición?
(c) ¿Cuanto tardará en bajar la concentración hasta 3 *ppm*?

9.- En el vertedero de basura de Valdemingómez se ha observado que cada año los camiones de la CAM depositan un 5 % más de basura que el año anterior. Como la basura no se retira, se va acumulando.
(a) Escribir una función que exprese la cantidad de basura depositada cada año por los camiones de la CAM en el vertedero.
(b) Encontrar una fórmula que de la cantidad de basura acumulada en el vertedero al cabo de n años.
(c) Si inicialmente el vertedero estaba vacío y al cabo de un año contenía 1000 toneladas de basura, calcular cuantos años han de pasar para que la basura acumulada supere las 90,000 toneladas.

10.- Un estudiante decide aceptar un contrato en prácticas de un año (para obtener créditos de libre configuración). Tiene dos ofertas. La empresa A le ofrece un sueldo de 200 euros el primer mes y revisión salarial cada mes con aumento de sueldo: cada mes le pagarán un 5 % más que el anterior. La empresa B le ofrece un sueldo de 200 euros el primer mes y revisión salarial cada mes con aumento de sueldo: cada mes le pagarán 5,5 euros más que el anterior.
(a) Para cada una de las ofertas obtener el sueldo que obtendría el último mes del año.
(b) Para cada una de las ofertas obtener el sueldo total que obtendría en un año.

11.- Estudiamos una explotación forestal con una cantidad inicial de 1000 árboles. La masa forestal se regenera de forma natural, aumentando en un $0'5\,\%$ aproximadamente cada mes. Por otro lado, se talan k árboles cada mes.
(a) Si $k = 10$, calcular la cantidad de árboles al cabo de 24 meses. ¿Cuántos meses tardaría en extinguirse la población?
(b) Calcula el valor de k para el que la población al cabo de 24 meses sea de 500 árboles.

12.- En cierto cultivo de bacterias se observa que la población crece un 5 % cada hora, a partir de una población inicial de 1000 individuos.
(a) Escribir una fórmula para el número de bacterias tras n horas. ¿Cuándo se alcanzará el millón de individuos?
(b) Se quiere probar un antibiótico, del que se sabe que cada dosis elimina 100 bacterias. Si al cultivo anterior le aplicamos una dosis de antibiótico cada hora, escribe una fórmula para el número de bacterias tras n horas. ¿Cuánto tardará en desaparecer la población de bacterias?

13.- Cada 4 horas tomamos 20 miligramos de un medicamento y cada 4 horas el cuerpo elimina una quinta parte de lo que tiene.
(a) ¿Cuántos miligramos de medicamento tendremos inmediatamente después de tomar la tercera dosis?
(b) Escribir la función que expresa el número de miligramos en el organismo en función del tiempo (tomando como unidad de tiempo los intervalos de 4 horas).
(c) A largo plazo, ¿cuál será la cantidad de medicamento en el organismo?

14.- Una sustancia radiactiva se desintegra a razón de un $\alpha\,\%$ cada año.
(a) Si la cantidad de sustancia presente en este momento es de 120 Kg., hallar la expresión de la cantidad de sustancia, $C(t)$, al cabo de t años.
(b) Calcular el valor de α sabiendo que dentro de 20 años la cantidad de sustancia presente será el doble de la que habrá dentro de 40 años.

15.- Dos especies de paramecios (*paramecium aurelia y paramecium caudata*) compiten en un nicho ecológico por los mismos recursos. El número de individuos en un mililitro (N) de *paramecium caudata* en este ecosistema viene dado aproximadamente por la función:

$$N(t) = 50(6t+1)e^{-2t} \qquad (t = \text{tiempo en días}).$$

(a) Número de individuos de *paramecium caudata* al empezar el estudio.
(b) Calcular el número máximo de individuos e indicar cuando se alcanza.
(c) ¿Qué ocurre con la población a largo plazo?