Hoja 1: Funciones, límites y continuidad.

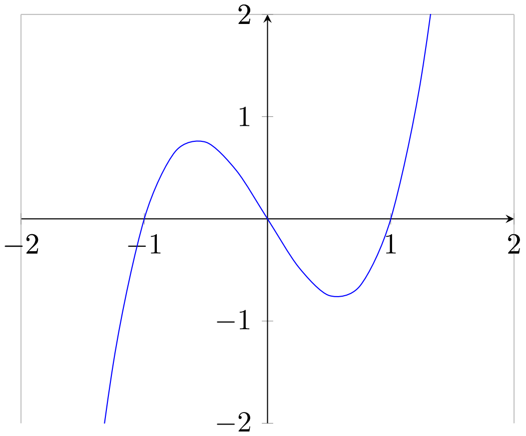
1.- Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

$$(a)\quad f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6},\qquad (b)\quad f(x)=\sqrt{x^2-1},$$

$$(c)\quad f(x)=\frac{1}{x-\sqrt{1-x^2}},\qquad (d)\quad f(x)=\frac{1}{1-\log x},$$

$$(e)\quad f(x)=\frac{\sqrt{5-x}}{\log x},\qquad (f)\quad f(x)=\log(x-x^2).$$

2.- Sea $f(x)$ una función cuya gráfica es la siguiente:



a) Dibujar la gráfica de $g(x)=f(x+2)$.
b) Dibujar la gráfica de $h(x)=f(x)-1$.
c) Dibujar la gráfica de $j(x)=f(|x|)$.
d) Dibujar la gráfica de $k(x)=|f(x)|$.
e) Dibujar la gráfica de $l(x)=f(2x)$.
f) Dibujar la gráfica de $m(x)=f(1/x)$.

3.- Estudia la simetría de las siguientes funciones:

$$(a)\quad f(x)=\frac{x}{x^2-1},\qquad (b)\quad f(x)=\sqrt{1-x^2},$$

$$(c)\quad f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x},\qquad (d)\quad f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\cos x.$$

4.- Si f y g son dos funciones impares, ¿cómo son $f+g$, $f\cdot g$ y $f\circ g$? ¿Y si f es par y g impar?

5.- Consideramos las funciones:

$$f(x)=\cos x\,,\quad g(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\in[-1,1]\\ x, & \text{si } x\notin[-1,1].\end{cases}$$

a) Calcular $f\circ g$.
b) Calcular $g\circ f$.

6.- Estudia cuáles de las siguientes funciones son inyectivas, hallando su inversa en caso de que lo sean o, en caso contrario, dando un ejemplo de dos puntos con la misma imagen.

$$(a)\quad f(x)=7x-4,\qquad (b)\quad f(x)=\operatorname{sen}(7x-4),$$

$$(c)\quad f(x)=(x+1)^3+2,\qquad (d)\quad f(x)=\frac{x+2}{x+1},$$

$$(e)\quad f(x)=x^2-3x+2,\qquad (f)\quad f(x)=\frac{x}{x^2+1},$$

$$(g)\quad f(x)=\mathrm{e}^{-x},\qquad (h)\quad f(x)=\log(x+1).$$

7.- Esboza, con los mínimos cálculos posibles, la gráfica de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x) = (x+2)^2 - 1, \qquad (b) \quad f(x) = \sqrt{4-x},$$

$$(c) \quad f(x) = \text{mín}\{x, x^2\}, \qquad (d) \quad f(x) = x^2 + 1/x,$$

$$(e) \quad f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}, \qquad (f) \quad f(x) = |\mathrm{e}^x - 1|,$$

$$(g) \quad f(x) = |x^2 - 1|, \qquad (h) \quad f(x) = [x]$$

8.- Calcula los siguientes límites simplificando los factores comunes que puedan aparecer:

$$(a) \quad \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}, \qquad (b) \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{3-\sqrt{x^2+8}},$$

$$(c) \quad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}, \qquad (d) \quad \lim_{x\to -1} \left(\frac{3}{x+1} - \frac{12}{x^2+6x+5}\right),$$

$$(e) \quad \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right), \qquad (f) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$$

9.- Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

$$(a) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x-7}{7x^2-\sqrt{2x^6+x^5}}, \qquad (b) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{(3x^2-1)^2(x+7)^3}{x^7+6},$$

$$(c) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2-7}, \qquad (d) \quad \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right),$$

$$(e) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}, \qquad (f) \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1},$$

$$(g) \quad \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{1/x}, \qquad (h) \quad \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{1/x},$$

$$(i) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\mathrm{e}^{1/x}}{1+\mathrm{e}^{1/x}}, \qquad (j) \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\mathrm{e}^{1/x}}{1+\mathrm{e}^{1/x}},$$

$$(k) \quad \text{lím}_{x\to 2^-} \tfrac{x}{x^2-4}, \qquad (l) \quad \text{lím}_{x\to 1} \tfrac{|x-1|}{x-1}$$

10.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-4}, \qquad (b) \quad f(x) = x - [x],$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-5x}+\cos x}{x^2-8x+12}, \qquad (d) \quad f(x) = \mathrm{e}^{3/x} + x^3 - 9,$$

$$(e) \quad f(x) = x^3 \operatorname{tg}(3x+2), \qquad (f) \quad f(x) = \sqrt{x^2-5x+6},$$

$$(g) \quad f(x) = (\log(x-2))^3, \qquad (h) \quad f(x) = (x-5)\log(8x-3),$$

$$\text{(i) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [a-1, a), \\ x+a & \text{si} \quad x \in [a, a+1]. \end{cases} \qquad \text{(j) } f(x) = \begin{cases} -|\operatorname{sen} x| - 4 & \text{si} \quad x < \pi, \\ |\cos x| - 5 & \text{si} \quad x \geq \pi. \end{cases}$$

11.- Estudiar si hay algún valor de k para el que la siguiente función sea continua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + 2 & \text{si} \quad x \neq 0, \\ k & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$