Hoja 9

1. Sea S una superficie regular y sea $p \in S$. Demuestra que la curvatura gaussiana en p (con respecto a la primera forma fundamental) verifica:

$$K(p) = \lim_{r \to 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A}{r^4}$$

donde A es el área del disco geodésico centrado en p y de radio r.

2. Sea S una superficie regular con métrica de Riemann Q y sea $c > 0$ una constante.

   (a) Demuestra que las geodésicas para cQ son las mismas que para Q.

   (b) Halla la relación entre la curvatura gaussiana de Q y de cQ.

3. A una superficie S, con parametrización regular $\mathbf{X}(u, v)$, $u > 0, v > 1$, le damos la siguiente métrica de Riemann:

$$Q \;=\; (du)^2 + \frac{2}{v}\,(du)(dv) + e^u\,(dv)^2 \,.$$

   (a) Comprueba que las curvas $\alpha(t) = \mathbf{X}(\,t\,,\,\mathrm{cte}\,)$ son geodésicas unitarias para Q.

   (b) Halla la trayectoria Q-ortogonal, pasando por el punto $\mathbf{X}(1, e)$, de esas geodésicas. Parametrízala como $\mathbf{X}(h(v), v)$ para cierta función $h(v)$.

   (c) Utiliza lo obtenido en los apartados (a) y (b) para construir coordenadas $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ en las cuales tengamos:
$$Q \;=\; (d\,\widetilde{u})^2 + C(\widetilde{u}, \widetilde{v})\,(d\,\widetilde{v})^2 \,,$$
   y calcula explícitamente la función $C(\widetilde{u}, \widetilde{v})$.

4. Consideremos el plano hiperbólico: $\mathbb{H} = \{(u, v) : v > 0\}$ con $Q = \dfrac{(du)^2 + (dv)^2}{v^2}$

   Sea $C(c, R)$ el círculo de centro $c = (u_0, v_0)$ y radio R en $\mathbb{H}$, es decir,

$$C(c, R) := \{(u, v) \in \mathbb{H} :\; d_{\mathbb{H}}((u, v), c_0) = R\}$$

   (a) Comprueba que $C(c, R)$ es un círculo euclídeo de centro $(u_0, v_0 \cosh R)$ y radio $v_0 \operatorname{senh} R$.

   (b) Demuestra que $C(c, R)$ tiene curvatura geodésica $\coth R$.

5. Sea S una superficie regular con parametrización $\mathbf{X}(u, v)$ y con métrica de Riemann Q. Demuestra:

$$Q = (du)^2 + h(u, v)^2 (dv)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad K = \frac{-h_{uu}}{h}.$$

$$Q = a^2 (du)^2 + b^2 (dv)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad K = \frac{-1}{ab}\left[\left(\frac{a_v}{b}\right)_v + \left(\frac{b_u}{a}\right)_u\right].$$

$$Q = e^{2h(u,v)}[(du)^2 + (dv)^2] \qquad \Longrightarrow \qquad K = \frac{-h_{uu} - h_{vv}}{e^{2h}}.$$

$$Q = (du)^2 + 2\cos\theta (du)(dv) + (dv)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad K = \frac{-\theta_{uv}}{\operatorname{sen}\theta}.$$

6. Una superficie S tiene primera forma fundamental

$$I = (du)^2 + 2u(du)(dv) + (dv)^2, \qquad \text{con} \quad |u| < 1$$

Demuestra que S es localmente isométrica al plano euclídeo.

7. En el plano xy consideramos la fórmula:

$$\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(x^2 + y^2 + c)^2} \qquad \text{con } c = cte \in \mathbb{R}$$

Describe, según el valor de c, el dominio del plano donde esta fórmula define una métrica y calcula la curvatura gaussiana de dicha métrica.

8. Sea Σ con parametrización $\mathbf{X}(u, v)$ y métrica de Riemann

$$Q \;=\; \frac{(du)^2}{1 - u^2} + u^2\,(dv)^2 \,.$$

Demuestra que (Σ, Q) es isométrica a una esfera (con primera forma fundamental). Calcula el radio de la esfera y determina la isometría.

9. Sea S el helicoide, parametrizado por $\Phi(u, v) \equiv (\,u\cos v\,,\, u \operatorname{sen} v\,,\, v\,)$. Halla todas las isometrías del helicoide consigo mismo respecto de la primera forma fundamental.

10. Tenemos dos parametrizaciones de las mismas variables: $\Phi(u, v)$ y $\Psi(u, v)$, con $u > 0$. Sean S_1 y S_2 las superficies definidas por ellas. Sabiendo que:

$$\begin{aligned} I_\Phi &\equiv \frac{1}{2u}\,(du)^2 + u^2\,(dv)^2 \,, \\ I_\Psi &\equiv \frac{1}{2u}\,(du)^2 + \frac{1}{2u}\,(dv)^2 \,, \end{aligned}$$

demuestra que no hay ninguna isometría $S_1 \to S_2$.