Hoja 7

1. Sea S_1 la superficie dada por la siguiente parametrización:
$$\mathbf{X}(u,v) \;=\; \big(u\cos v\,,\; u\operatorname{sen} v\,,\; u+v\big)\;,$$
y sea S_2 el hiperboloide de una hoja con parametrización:
$$\Phi(z,\theta) \;=\; \left(\sqrt{1+z^2}\cos\theta\,,\; \sqrt{1+z^2}\operatorname{sen}\theta\,,\; z\right)\;.$$
Encuentra una isometría local $h : S_1 \to S_2$ siguiendo las indicaciones:
   (a) Calcula $I_{\mathbf{X}}$ e I_Φ.
   (b) Plantea $\mathbf{X}(u,v) \stackrel{h}{\longmapsto} \Phi\big(\,z(u,v)\,,\,\theta(u,v)\,\big)$, para ciertas funciones $z(u,v), \theta(u,v)$, y escribe el sistema de EDPs que éstas tienen que satisfacer para que h sea isometría local.
   (c) Calcula las funciones $K_{\mathbf{X}}(u,v)$ y $K_\Phi(z,\theta)$. Aplica el teorema egregio de Gauss y determina una de las dos funciones $z(u,v)$ o $\theta(u,v)$.
   (d) Vuelve ahora la sistema de EDPs y completa el cálculo de h.

2. Considera las superficies S_1 y S_2 parametrizadas respectivamente por:
$$\mathbf{X}(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, v)$$
$$\mathbf{Y}(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, \log u)$$
   (a) Demuestra que la curvatura gaussiana de S_1 en el punto $\mathbf{X}(u,v)$ coincide con la curvatura gaussiana de S_2 en el punto $\mathbf{Y}(u,v)$.
   (b) Demuestra que la función de S_1 en S_2 definida por $\mathbf{X}(u,v) \mapsto \mathbf{Y}(u,v)$ no es una isometría local.
   (c) Demuestra que no hay ninguna isometría local entre S_1 y S_2.

3. Encuentra las geodésicas en:
   (a) El cilindro circular $x^2+y^2=1$.
   (b) El cono circular $x^2+y^2=z^2$ con $z>0$.

   Sugerencia: Una isometría local entre superficies lleva geodésicas en geodésicas.

4. Interpretando línea recta como geodésica, decide, razonadamente, cuales de las siguientes propiedades de la geometría euclidea en el plano son ciertas para un cono circular.
   (a) Dados dos puntos en el plano hay una línea recta pasando por ellos.
   (b) Dados dos puntos en el plano hay una única línea recta pasando por ellos.
   (c) Dos línea rectas se intersecan como mucho en un punto.
   (d) Existen líneas rectas que no se intersecan.

(e) Una línea recta puede continuarse indefinidamente.

(f) Una línea recta define la distancia mas corta entre cualquier par de puntos en ella.

(g) Una línea recta no puede insersectarse a sí misma transversalmente, es decir con dos vectores tangentes no paralelos en el punto de intersección.

5. Sea $\gamma(t)$ una curva con rapidez uno en el helicoide S parametrizado por:

$$\mathbf{X}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v).$$

(a) Demuestra que

$$(u')^2 + (1 + u^2)(v')^2 = 1$$

(b) Demuestra que si γ es una geodésica en S, entonces

$$v' = \frac{a}{1 + u^2}, \qquad \text{con } a \text{ constante.}$$

(c) Encuentra las geodésicas correspondientes a $a = 0$ y $a = 1$.

6. Sea $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ una curva plana parametrizada por longitud de arco y sea S el cilindro formado por las rectas verticales que cortan a γ, con parametrización

$$\mathbf{X}(u, v) = (x(u), y(u), v).$$

(a) Encuentra las geodésicas en S.

(b) Demuestra que para una curva espacial birregular α las siguientes condiciones son equivalentes:

i. Existe un cilindro en el cual α es geodésica.

ii. La tangente unitaria $\mathbf{t}_\alpha$ forma un ángulo constante con una dirección fija en $\mathbb{R}^3$.

iii. La tangente unitaria $\mathbf{t}_\alpha$ traza una circunferencia, o parte de ella.

iv. El cociente τ_α / k_α es constante.

Sugerencia: Parametrizar por arco y rotar para que la dirección fija en ii. sea vertical, entonces $\mathbf{t}_\alpha(s) = (a \cos \theta(s), a \operatorname{sen} \theta(s), b)$ donde a, b constantes con $a^2 + b^2 = 1$ y $\theta(s)$ es una cierta función.

7. Considera un círculo de latitud C, parametrizado por longitud de arco, en la esfera unidad. Fijado un punto P en C, determina el efecto de trasladar paralelamente un vector unitario tangente a C en P a lo largo del círculo.