Hoja 6

1. Decide, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tus respuestas.

   (a) Sean S_1 y S_2 dos superficies isométricas, y sea $h : S_1 \to S_2$ una isometría entre ellas. Sea $\alpha(s)$ una curva en S_1, y sea $\beta(s) = h \circ \alpha(s)$. Si α está parametrizada por longitud de arco, entonces β también lo está.

   (b) Sean S_1 y S_2 dos superficies isométricas, y sea $h : S_1 \to S_2$ una isometría entre ellas. Sea $\alpha(s)$ una curva en S_1, y sea $\beta(s) = h \circ \alpha(s)$ la correspondiente curva en S_2. Entonces las curvaturas normales de α y β son iguales.

   (c) Sea S una superficie regular. Si todos los puntos de S son elípticos, entonces S no puede contener ninguna recta afín.

   (d) Sea S una superficie regular. Si por un punto $\mathbf{p} \in S$ pasan dos rectas contenidas en S, entonces p tiene que ser plano.

   (e) Sea S una superficie regular. Si por un punto $\mathbf{p} \in S$ pasan tres rectas contenidas en S, entonces p tiene que ser plano.

2. Sea S el helicoide parametrizado por: $\mathbf{X}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v)$.

   (a) Elige un campo normal unitario y halla las formas fundamentales primera y segunda.

   (b) Calcula la matriz del endomorfismo de Weingarten $W = dN$ en la base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$.

   (c) Calcula las curvaturas gaussiana y media.

3. Demuestra que si la curvatura media se anula en un $p \in S$ y p no es un punto plano, entonces existen dos direcciones asintóticas ortogonales en p.

4. Demuestra que una curva biregular contenida en una superficie S es asintótica si y sólo si su plano osculador es tangente a la superficie en cada punto.

5. Sea S la superficie parametrizada por:

$$\mathbf{X}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u - v^2, v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty$$

   Clasifica sus puntos en elípticos, hiperbólicos, parabólicos o planos. Determina si hay algún punto umbilical.

6. El *paraguas de Whitney* es la superficie S parametrizada por $\mathbf{X}(u, v) = (\, u \,,\, uv \,,\, v^2 \,)$.

   (a) Comprueba que $\mathbf{X}$ es regular en todos los puntos excepto en $(u, v) = (0, 0)$.

   (b) Calcula la segunda forma fundamental y comprueba que todos los puntos con $v \neq 0$ son hiperbólicos.

   (c) Las líneas $v = \mathrm{cte}_1$ son rectas afines, y por lo tanto líneas asintóticas de S. Halla la otra familia de líneas asintóticas, expresándola como $u \cdot h(v) = \mathrm{cte}_2$ donde $h(v)$ es cierta función solamente de v. Demuestra que, aparte de la semirrecta $u = 0$ y las reglas $v = \mathrm{cte}_1$, el paraguas de Whitney no contiene ningún trozo de recta afín.

7. Sea $\alpha(u)$ una curva birregular en $\mathbb{R}^3$, parametrizada por arco, y sea $\{\mathbf{t}(u), \mathbf{n}(u), \mathbf{b}(u)\}$ su triedro de Frenet. Sea S la parte de la supercie tangencial de α dada por la siguiente parametrización: $\quad \Phi(u,v) = \alpha(u) + v\mathbf{t}(u)$, con $v > 0$.

   (a) Halla una normal unitaria $N(u,v)$ y utilízala para calcular directamente el endomorfismo de Weingarten $W = dN$ (sin pasar por la segunda forma fundamental).

   (b) Clasifica sus puntos en elípticos, hiperbólicos, parabólicos o planos.

   (c) Demuestra que si la torsión de α no se anula, entonces las reglas $u = cte$ son los únicos elementos rectilíneos contenidos en S. Sugerencia: Determina las líneas asintóticas. Deduce que S no es ni un cilindro ni un cono (sin embargo es localmente isométrica al plano, según se vió en el ejercicio 9 de la hoja 5).

8. Sea $\alpha(u) = (r(u), z(u)$ con $u \in J$, un perfil en el plano rz, y sea S la superficie de revolución que se obtiene al rotar α alrededor del eje z. Tenemos para S la parametrización:

$$\mathbf{X}(u,\theta) = (r(u)\cos\theta,\ r(u)\mathrm{sen}\,\theta,\ z(u))$$

   (a) Eligiendo la normal unitaria $N = (X_u \times X_\theta)/\ell$ con $\ell = \|X_u \times X_\theta\|$, calcula la segunda forma fundamental.

   (b) Halla la matriz del endomorfismo de Weingarten $W = dN$ en la base $\{X_u,\ X_\theta\}$ y comprueba que es una matriz diagonal ¿cuáles son las líneas de curvatura?

   (c) Comprueba que si α está parametrizada por longitud de arco entonces entonces $N = (-z'(u)\cos\theta,\ -z'(u)\mathrm{sen}\,\theta,\ r'(u))$. Demuestra que en este caso las curvaturas principales vienen dadas por las siguientes fórmulas:

$$r'(u)z''(u) - r''(u)z'(u) \quad \text{y} \quad \frac{z'(u)}{r(u)}$$

9. Sea S la esfera unidad menos un meridiano con parametrización:

$$\Phi(u,v) \ \equiv\ \big(\cos u\cos v\,,\ \cos u \mathrm{sen}\, v\,,\ \mathrm{sen}\, u\big), \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v < 2\pi\ .$$

   (a) Para cada $c > 1$, encuentra funciones suaves $r_c(u)$ y $z_c(u)$), tales que si S_c es la superficie de revolución parametrizada por

$$\mathbf{X}_c(u,\mu) \ \equiv\ \big(r_c(u)\cos(\mu)\,,\ r_c(u)\mathrm{sen}\,(\mu)\,,\ z_c(u)\big), \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < \mu < +\infty\ ,$$

   entonces la aplicación $h_c : S \to S_c$ dada por $\Phi(u,v) \mapsto \mathbf{X}_c(u,cv)$ es una isometría local. (Deja $z_c(u)$ indicada como una integral indefinida).

   (b) Haz dibujos de S_2 y S_4. ¿Cuántas preimágenes por h_c tiene el punto $\mathbf{X}_c(0,\pi/2)$ para $c = 2$? ¿y para $c = 4$? ¿Qué le ocurre al ecuador de S_c a medida que c aumenta?

   (c) Demuestra que $z_c(\pi/2) - z_c(-\pi/2)$ es una función creciente de c. Explica por qué S_c se va afilando a medida que c aumenta. ¿A qué tiende S_c cuando $c \to \infty$?

   (d) Aplica el ejercicio anterior al perfil $\big(r_c(u)\,,\ z_c(u)\big)$ ¿conserva la isometría h_c el par no ordenado de curvaturas principales? ¿conserva h_c el producto de las curvaturas principales?

10. (a) Sea $\alpha(u)$ una curva birregular en el espacio, parametrizada por longitud de arco, con torsión constante $\tau \equiv 1$ y curvatura arbitraria $k(u) > 0$, y sea $\{\mathbf{t}(u), \mathbf{n}(u), \mathbf{b}(u)\}$ su triedro de Frenet. Definimos una superficie S mediante la parametrización:

$$\Phi(u,v) \ \equiv\ \alpha(u) + v\,\mathbf{b}(u)\,.$$

   Demuestra que S contiene a α y calcula I_Φ.

(b) Sean $\alpha_1(u), \alpha_2(u)$ dos curvas birregulares parametrizadas por longitud de arco, ambas con torsión constante 1 *pero con curvaturas* $k_1(u), k_2(u)$ *distintas.* A partir de α_1, α_2, construimos parametrizaciones respectivas $\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)$ igual que en el apartado (a) y llamamos S_1, S_2 a las superficies resultantes. Demuestra que la aplicación

$$h : S_1 \longrightarrow S_2 \qquad \text{definida por} \qquad \Phi_1(u,v) \longmapsto \Phi_2(u,v)$$

es una isometría local que lleva α_1 a α_2.

(c) Elige la normal unitaria N de S que cumple $N \cdot \mathbf{n}(u) > 0$, y demuestra que

$$II_S \equiv \sqrt{1+v^2}\, k(u)\, (du)^2 - 2\, \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\, du\, dv.$$

(d) Deduce que una familia de líneas asintóticas es la $u = \text{cte}$ y la otra viene dada por la ecuación $(1+v^2)\, k(u)\, u' - 2\, v' = 0$.

(e) Deduce también que las líneas de curvatura de S vienen dadas por:

$$u'^2 + k(u)\, u'\, v' - \frac{v'^2}{1+v^2} \;=\; 0\ .$$

(f) Halla la matriz de $-W = -dN$ en la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ y utilízala para calcular la pareja k_1, k_2 de curvaturas principales de S.

(g) En vista del resultado en (d) dí, razonadamente, si la isometría h del apartado (b) lleva o no líneas asintóticas de S_1 a líneas asintóticas de S_2 (recuerda que $k_1 \neq k_2$). Misma pregunta para líneas de curvatura.

(h) ¿Preserva la isometría h del apartado (b) la pareja de curvaturas principales? ¿Preserva el producto de esas dos curvaturas?