Hoja 5

1. Calcula la primera forma fundamental (eligiendo una parametrización cuando no se indique ninguna) de las siguientes superficies:
   - Superficie general de revolución: $\Phi(u,\theta) = \big(r(u)\cos\theta\,,\, r(u)\operatorname{sen}\theta\,,\, z(u)\big)$.
   - Helicoide: $\mathbf{X}\,(u,v) = (\, u\cos v\,,\, u\operatorname{sen} v\,,\, v\,)$.
   - Paraboloide de revolución: $\{z = x^2 + y^2\}$.
   - Hiperboloides: de una hoja $\{x^2+y^2 = 1+z^2\}$, de dos hojas $\{1+x^2+y^2 = z^2\}$.

2. Utiliza la parametrización de revolución del toro (ejercicio 4 de la hoja 4) para hallar la primera forma fundamental del toro y calcular el área del toro.

3. **La Pseudoesfera de Beltrami.** Recordemos la **tractriz,** curva plana que ha sido descrita en el ejercicio 11 de la hoja 1. Dadas las funciones:

$$r(v) \;=\; \frac{1}{v} \quad , \quad z(v) \;=\; \int_1^v \frac{\sqrt{v^2-1}}{v^2}\,dv \quad , \quad v>1\,,$$

demuestra que $\alpha(v) = \big(\, r(v)\,,\, z(v)\,\big)$ es una parametrización (no por longitud de arco) de la tractriz. La parametrización:

$$\Phi(u,v) \;=\; \big(\, r(v)\cos u\,,\, r(v)\operatorname{sen} u\,,\, z(v)\,\big) \quad , \quad (u,v)\in\mathbb{R}\times(1,+\infty)\,,$$

tiene por imagen la superficie de revolución obtenida al rotar la tractriz alrededor del eje z, superficie que se llama **Pseudoesfera de Beltrami**. Haz un dibujo de la pseudoesfera.

Comprueba que, como forma cuadrática en el semiplano $\{(u,v)\;:\; v>1\}$, es:

$$I_\Phi \;\equiv\; \frac{(du)^2+(dv)^2}{v^2}\,,$$

pero de hecho esa expresión vale en el semiplano mayor $\mathbb{H} \;=\; \{\,(u,v)\;:\; v>0\,\}$, en el cual recibe el nombre de **métrica hiperbólica.**

4. Cierta superficie S está dada por una parametrización regular $\mathbf{X}(u,v)$. Consideramos el siguiente campo de formas cuadráticas en S:

$$Q \;\equiv\; (du)^2 + 2\,(u+v)\,dudv + \big(\, e^v + (u+v)^2\,\big)\,(dv)^2\,. \tag{1}$$

En S tenemos otras coordenadas curvilíneas (λ,μ), relacionadas con las (u,v) por las siguientes identidades:

$$u \;\equiv\; 1-\mu+e^{\lambda-\mu} \quad , \quad v \;\equiv\; \mu\,.$$

Hallar la expresión de Q en las nuevas coordenadas, es decir,

$$Q \equiv A\,(d\lambda)^2 + 2\,B\,d\lambda d\mu + C\,(d\mu)^2$$

5. Sea S la silla, parametrizada por $\Phi(x,y) = (x,y,xy)$. Sea $u : S \to \mathbb{R}$ la función escalar dada por $u \equiv y$. Considera la familia de curvas definida por $u = \text{cte}$.

   (a) Calcula las trayectorias en S ortogonales a esas curvas, describiéndolas en la forma $v_0 = \text{cte}$ para cierta función $v_0(x,y)$.

   ¡Cuidado! ten en cuenta que Φ no conserva ángulos. Por lo tanto líneas ortogonales en la superficie corresponden a líneas en el plano de parámetros xy que son ortogonales para I_Φ pero tal vez no para la métrica estándar del plano.

   (b) Dada cualquier función de una variable φ, con φ' nunca nula, la función $v \equiv \varphi \circ v_0$ tiene en S las mismas curvas de nivel que v_0 (las trayectorias ortogonales del apartado anterior). Ajusta φ para que sea $v \equiv x\cdot\text{función}(y)$ y entonces considera las funciones u, v como unas nuevas coordenadas en S. Comprueba que en esas coordenadas la primera forma fundamental es diagonal, es decir

$$I \;\equiv\; \widetilde{E}(u,v)\,(du)^2 + \widetilde{G}(u,v)\,(dv)^2\ ,$$

   y da una explicación geométrica de por qué I es diagonal en las coordenadas (u,v).

6. Sea S el helicoide con la parametrización $\mathbf{X}\,(u,v) = (\,u\cos v\,,\,u \operatorname{sen} v\,,\,v\,)$. Sea $\alpha(u) \subset \mathbb{R}^3$ una curva birregular en el espacio, parametrizada por longitud de arco, y sea S' su superficie de las binormales, parametrizada por:

$$\Phi(u,v) = \alpha(v) + u\,\mathbf{b}_\alpha(v)$$

   Comprueba que Φ define un reglado de S' y que $h : S \to S'$, definida por $\mathbf{X}(u,v) \overset{h}{\longmapsto} \Phi(u,v)$, lleva reglas de S a reglas de S'. ¿Cómo tiene que ser α para que h sea una isometría local?

7. Sea S un cilindro generalizado, que suponemos *completo:* cada generatriz de S es una recta afín completa, paralela a un vector unitario fijado $\mathbf{u}_0$. Sea $\alpha_0(u) \subset S$ una trayectoria ortogonal a las generatrices, parametrizada por longitud de arco. Explica por qué la siguiente es una parametrización de S:

$$\Phi(u,\lambda) \;\equiv\; \alpha_0(u) + \lambda\,\mathbf{u}_0\ ,$$

   y comprueba que, la primera forma fundamental I_Φ es la misma para todos los cilindros. Considerando el caso en que α_0 es una recta, obtén una isometría local del plano (con la métrica estándar) a cualquier cilindro (con su primera forma fundamental). Demuestra que las trayectorias ortogonales a las generatrices del cilindro (paralelas a $\mathbf{u}_0$) son los cortes con los niveles de la función $h(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{x}$.

8. Sea S un cono generalizado con vértice $\mathbf{p}_0$. Suponemos S *completo:* cada generatriz de S es una semirrecta completa empezando en $\mathbf{p}_0$.

   Sea $\alpha_1(u)$ una parametrización, por longitud de arco, del corte del cono con la esfera unidad centrada en $\mathbf{p}_0$. Explica por qué la siguiente es una parametrización del cono:

$$\Phi(u,\lambda) \;\equiv\; \mathbf{p}_0 + \lambda\,\alpha_1(u) \quad , \quad \lambda > 0\ ,$$

   y comprueba que, la primera forma fundamental I_Φ es la misma para todos los conos. Considerando el caso en que α_1 recorre el ecuador de la esfera unidad o parte de él, deduce que cualquier cono (con su primera forma fundamental) es localmente isométrico al plano (con la métrica estándar). Demuestra que las trayectorias ortogonales a las generatrices del cono son los cortes con las esferas centradas en el vértice.

9. Sea $\alpha(s)$, $s \in J$, una curva birregular en el espacio parametrizada por longitud de arco. Sea $\{\, \mathbf{t}(s)\,,\, \mathbf{n}(s)\,,\, \mathbf{b}(s)\,\}$ su triedro de Frenet y sean $k_\alpha(s), \tau_\alpha(s)$ su curvatura y torsión.

   La **superficie tangencial** de α es la superficie reglada igual a la unión de las rectas tangentes afines de α. Se divide en dos mitades, una de ellas parametrizada por:

   $$\Phi(s,\lambda) \;\equiv\; \alpha(s) + \lambda\, \mathbf{t}_\alpha(s) \quad , \quad s \in J \;,\; \lambda \geq 0 \;,$$

   y la otra mitad por la misma fórmula pero en el dominio $\{s \in J \;,\; \lambda \leq 0\}$.

   Consideramos la mitad positiva. Calcula la primera forma fundamental I_Φ y comprueba que depende de k_α pero no de τ_α. Sea $\beta(s)$, $s \in J$, la curva *plana* parametrizada por longitud de arco con curvatura $k_\beta(s) \equiv k_\alpha(s)$. Demuestra que las superficies tangenciales (positivas) de α y de β son localmente isométricas (con las respectivas primeras formas fundamentales). Deduce que toda superficie tangencial (con su primera forma fundamental) es localmente isométrica a un dominio del plano (con la métrica estándar). Las trayectorias ortogonales a las reglas en la superficie tangencial de α ¿en qué curvas del plano se transforman por la isometría local?

10. Demuestra que la parametrización estereográfica (ejercicio 5 de la hoja 4) es conforme.

11. El helicoide es la superficie parametrizada por $\mathbf{X}(\lambda, v) = (\lambda \cos v, \lambda \operatorname{sen} v, v)$. Encuentra una función $h(u)$ con $h'(u) > 0$ y tal que $\Phi(u,v) = \mathbf{X}(h(u), v)$ sea una parametrización conforme.

12. Sea S la esfera unidad (menos los polos norte y sur) parametrizada por:

    $$\Phi(u,\theta) = \big(\, \operatorname{sen} u\, \cos\theta \,,\, \operatorname{sen} u\, \operatorname{sen}\theta \,,\, \cos u \,\big) \quad , \quad 0 < u < \pi \;.$$

    Determina una función $\varphi(u)$ para que $h : S \to$ (plano xy) dada por $\Phi(u,\theta) \mapsto \big(\theta, \varphi(u)\big)$ sea conforme (proyección de G. Mercator, casi un siglo antes del cálculo infinitesimal).

    ¿En qué convierte la proyección de Mercator a los meridianos?

13. Sea S la esfera unidad (menos los polos norte y sur) parametrizada por:

    $$\mathbf{X}(u,\theta) = \big(\, \cos u\, \cos\theta \,,\, \cos u\, \operatorname{sen}\theta \,,\, \operatorname{sen} u \,\big) \;, \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \;.$$

    Sea S' el cilindro circular parametrizado por $\Phi(\overline{\theta}, \overline{u}) = (\cos\overline{\theta}, \operatorname{sen}\overline{\theta}, \overline{u})$. Sea $h : S \to S'$ definida por

    $$\mathbf{X}(u,\theta) \;\xmapsto{h}\; \Phi(\theta, \operatorname{sen} u)$$

    Haz un dibujo y describe h geométricamente. Comprueba que h es equiárea (Arquímedes, siglo III A.C.)