Hoja 4: superficies, primeros pasos

Un **reglado** de una superficie S es una descomposición (si existe) de S en rectas, semirrectas o segmentos. Estos elementos rectilíneos se llaman **reglas** y los suponemos disjuntos dos a dos. Decimos que S es una **superficie reglada** si admite al menos un reglado.

1. Llamamos **parametrización de revolución** a cualquiera que se escriba de la manera siguiente:
$$\mathbf{X}(u,\theta) \equiv \big(r(u)\cos\theta\,,\, r(u)\operatorname{sen}\theta\,,\, z(u) \big)\,, \tag{1}$$
para algún camino suave $\big(r(u), z(u)\big)$ (llamado **perfil**) en el semiplano $\{r \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2_{rz}$.
   (a) Si S es la imagen de (1), demuestra que los **meridianos** (cortes de S con los semiplanos verticales de borde el eje z) son copias del perfil y se deducen unos de otros por rotaciones espaciales alrededor del eje z. Demuestra que los **paralelos** (cortes de S con los planos $\{z = \text{cte}\}$) son *circunferencias coaxiales,* con eje común el eje z.
   (b) Tomamos una curva **catenaria** puesta en el semiplano rz como $\{r = \cosh z\}$. Al rotarla alrededor del eje z engendra una superficie que se llama **catenoide.** Construye una parametrización del catenoide.
   (c) Considera la siguiente parametrización:
$$\Phi(u,\theta) \equiv \big(u^3\cos\theta\,,\, u^3\operatorname{sen}\theta\,,\, 1-u^2 \big) \quad , \quad (u,v)\in\mathbb{R}^2\,.$$
   ¿Es Φ una función $\mathcal{C}^\infty$? Haz un dibujo de un meridiano y un dibujo de $\Phi(\mathbb{R}^2)$.

2. El **helicoide** es una superficie que puede darse por la siguiente parametrización:
$$\mathbf{X}(u,v) \equiv \big(u\cos v\,,\, u\operatorname{sen} v\,,\, v \big) \quad , \quad (u,v)\in\mathbb{R}^2\,. \tag{2}$$
Comprueba que esta parametrización es regular e inyectiva, y que da lugar a un reglado del helicoide. ¿Es (2) una parametrización de revolución?

3. Dadas constantes $a,b,c>0$, demuestra que la aplicación lineal $(x,y,z) \longmapsto (\,ax\,,\,by\,,\,cz\,)$ lleva la esfera unidad biyectivamente al eplipsoide de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$ Aprovecha esto para construir una parametrización del elipsoide, a partir de la parametrización de revolución de la esfera.

   Haz lo mismo con otras cuádricas, poniéndolas como imágenes de superficies de revolución.

4. Se llama **toro** a la superficie de revolución que resulta de rotar alrededor del eje z una circunferencia situada en el plano xz y disjunta con ese eje. Construye una parametrización del toro.

5. Sean $S = \{\,(x,y,z)\;:\; x^2+y^2+z^2=1\,\}$ la esfera unidad y $\mathrm{N}=(0,0,1)$ el polo norte. La **parametrización estereográfica** es la aplicación $\phi(u,v):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida de la manera siguiente:

   La recta que une $(u,v,0)$ con el polo norte corta a la esfera
   en dos puntos: uno es el polo norte, el otro es $\phi(u,v)$.

   Haz un dibujo. Calcula ϕ y demuestra que es una parametrización regular, que parametriza $S\backslash\{\mathrm{N}\}$ biyectivamente, y que la inversa $\phi^{-1}:S\backslash\{\mathrm{N}\}\to\mathbb{R}^2$, llamada **proyección estereográfica desde el polo norte,** está dada por $S\setminus\{\mathrm{N}\}\ni(x,y,z)\longmapsto(u,v)=\dfrac{(x,y)}{1-z}.$

6. Sea $S = \{\, (x,y,z) \ : \ x^2+y^2 = z^2+1 \,\}$ un hiperboloide de una hoja. Demuestra que las parametrizaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\,(t,\theta) \ &\equiv \ \big(\sqrt{1+t^2}\cos\theta\,,\, \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\, t\,\big)\,, \\ \Phi(u,v) \ &\equiv \ \big(\, \cos v - u\,\mathrm{sen}\,v\ ,\ \mathrm{sen}\,v + u\cos v\ ,\ u\,\big)\,, \end{aligned}$$

cumplen $\mathbf{X}\,(\mathbb{R}^2) \subseteq S \subseteq \mathbf{X}\,(\mathbb{R}^2)$ y $\Phi(\mathbb{R}^2) \subseteq S \subseteq \Phi(\mathbb{R}^2)$. Explica por qué $\mathbf{X}$ exhibe S como superfice de revolución, mientras que Φ la exhibe como superficie reglada.

   Comprueba que la reflexión $(x,y,z) \longmapsto (x,-y,z)$ lleva S a sí misma, pero cambia el reglado de S definido por Φ a otro reglado distinto (Por lo tanto, este hiperboloide es una superficie *reglada de dos maneras diferentes*).

7. Parametriza la silla $\{z = xy\}$ como un grafo, y comprueba que todas las líneas coordenadas son rectas (por lo tanto, la silla es reglada de dos maneras diferentes).

8. Llamamos **cilindro generalizado,** o simplemente **cilindro,** a cualquier superficie reglada cuyas reglas son todas paralelas entre sí. Demuestra que una superficie es un cilindro si y sólo si admite parametrizaciones de la forma siguiente:

$$\Phi(u,\lambda) \ \equiv \ \alpha(u) + \lambda\,\mathbf{w}\ ,$$

   siendo $\alpha(u)$ un camino en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ un vector constante no nulo.

9. Llamamos **cono generalizado,** o simplemente **cono,** a una superficie reglada cuyas reglas (debidamente prolongadas) pasan todas por un punto llamado **vértice.** Demuestra que una superficie es un cono de vértice $\mathbf{p}_0$ si y sólo si admite parametrizaciones de la forma:

$$\Phi(u,\lambda) \ \equiv \ \lambda\ \alpha(u) + \mathbf{p}_0\ ,$$

   siendo $\alpha(u)$ un camino en la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$.

10. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie cuyos planos tangentes afines pasan todos por un punto $\mathbf{p}$. Demuestra que S está contenida en un cono de vértice $\mathbf{p}$. **Indicación:** estudia el corte de S con los planos que pasan por $\mathbf{p}$ y usa el ejercicio 12 (a) de la hoja 1.

11. Sea $\alpha(s) : J \to \mathbb{R}^3$ curva espacial birregular, parametrizada por arco. Se llama **superficie tangencial de** α a la superficie reglada cuyas reglas son las tangentes afines de α. Demuestra que admite la siguiente parametrización:

$$\Phi(s,u) \ \equiv \ \alpha(s) + u\,\mathbf{t}_\alpha(s) \quad , \quad (s,u) \in J \times \mathbb{R}\ .$$

    Hay valores (s,u) en los que Φ no es regular ¿cuáles son?

    Demuestra que en todos los puntos regulares de una regla $\{s = s_0\}$ el plano tangente afín de esta superficie coincide con el plano osculador afín de α en $s = s_0$.

12. Sean S una superficie cerrada simple. Demuestra que dado cualquier vector unitario $\mathbf{u}$ existe un punto $\mathbf{p} \in S$ tal que $\mathbf{u}$ es normal unitaria del plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$.

    Indicación: dado $\mathbf{u}$, considera la **función altura** $S \to \mathbb{R}$ dada por $S \ni \mathbf{p} \longmapsto \mathbf{u}\cdot\mathbf{p}$.