Hoja 2

1. Vuelve a hacer el ejercicio 12 de la Hoja 1, pero ahora haciendo uso del concepto de curvatura de una curva en el plano.

2. Halla una curva plana $\alpha(s)$ parametrizada por longitud de arco y con $k(s) \equiv 1/(1+s^2)$.

3. Sea Γ una curva cerrada simple en el plano, contenida en el disco $\{x^2+y^2 \leq r^2\}$.

   Demuestra que existe un punto $\mathbf{p} \in \Gamma$ con $|k(\mathbf{p})| \geq 1/r$.

   Pista: modifica el disco hasta que Γ toque su borde.

4. Sea α una curva regular plana y β la transformada de α por una homotecia del plano:

$$(x,y) \longmapsto (\, cx \,,\, cy \,)\,,$$

   (aquí c es una constante positiva). Halla la relación entre la curvatura de α y la de β.

5. Sea $(-a,a)$ un intervalo simétrico respecto de 0 y $\alpha(s) : (-a,a) \to \mathbb{R}^2$ una curva plana parametrizada por longitud de arco. Sea $k_\alpha(s)$ su función curvatura.

   (a) Demuestra que $\beta(\tilde{s}) \equiv \alpha(-\tilde{s})$ es una parametrización por longitud de arco y halla la correspondiente función curvatura $k_\beta(\tilde{s})$.

   (b) Si se verifica $k_\alpha(-s) \equiv k_\alpha(s)$, demuestra que α es simétrica respecto de su normal afín en $s=0$.

   (c) Si se verifica $k(-s)_\alpha \equiv -k_\alpha(s)$, demuestra que α tiene simetría central respecto del punto $\alpha(0)$.

6. Sea $\beta(t)$ una curva regular plana. Para cada constante c, la *curva paralela* correspondiente es la curva β_c definida por $\beta_c(t) \equiv \beta(t) + c\,\mathbf{n}_\beta(t)$. Demuestra que dos curvas planas regulares tienen las mismas normales afines si y sólo cada una es una paralela de la otra.

7. **(Envolvente de una familia de curvas).** Sea $\alpha_\lambda(t)$ una *familia uniparamétrica* de curvas regulares en el plano. Esto quiere decir que λ recorre un intervalo y para cada valor suyo λ_0 la función $t \mapsto \alpha_{\lambda_0}(t)$ es un camino regular en el plano. Se dice que la curva α_λ *depende suavemente del parámetro* λ si la siguiente aplicación:

$$\Phi(t,\lambda) : \big(\text{un abierto del plano } t\lambda\big) \longmapsto \mathbb{R}^2 \quad , \quad \Phi(t,\lambda) \equiv \alpha_\lambda(t)$$

   es suave como función de las dos variables (t,λ). La **envolvente** de esta familia es una curva o sistema de curvas (si es que existe) que toque tangentemente a las α_λ. Vamos a dar un método para calcularla, que requiere tener claros los dos conceptos siguientes:

   – Un **punto singular** de Φ es cualquier (t_0,λ_0) del dominio de Φ donde la matriz jacobiana $D\Phi_{(t_0,\lambda_0)}$ no es invertible.

   – Un **valor singular** de Φ es la imagen por Φ de algún punto singular de Φ.

El método funciona así: si un camino $\beta(u) \equiv \big(t(u), \lambda(u)\big)$ traza el conjunto de puntos singulares (o una parte del mismo), entonces el camino $\gamma(u) \equiv \Phi\big(\beta(u)\big)$ traza la envolvente (o parte de ella). La envolvente queda formada, pues, por valores singulares de Φ.

(a) Halla la envolvente de la siguiente familia de parábolas:

$$\alpha_\lambda(t) \;\equiv\; \big(\, t\,,\, (t-\lambda)^2\,\big)\,,$$

y haz un dibujo conjunto de la familia y la envolvente. Observa que en este caso Φ no es inyectiva y que la envolvente separa la "zona recubierta dos veces" de la "zona no recubierta" por Φ (esto es lo que el ojo humano ve).

(b) Halla la envolvente de la siguiente familia de cúbicas:

$$\alpha_\lambda(t) \;\equiv\; \big(\, t\,,\, (t-\lambda)^3\,\big)$$

y haz un dibujo conjunto de la familia y la envolvente. Observa que en este caso Φ es inyectiva, y de hecho *bicontinua,* pero no es un *difeomorfismo* porque tiene valores singulares ¿Cómo ve el ojo humano esta envolvente?

8. Recuerda que, dada una curva plana α, su **evoluta** es el lugar geométrico de sus centros de curvatura. Explica por qué la siguiente parametrización

$$\gamma(t) \;\equiv\; \alpha(t) + \frac{1}{k_\alpha(t)}\,\mathbf{n}_\alpha(t) \tag{1}$$

traza la evoluta de α, de modo que cada $\gamma(t_0)$ es el centro de curvatura de α correspondiente al valor $t = t_0$.

Suponiendo ahora que $\alpha(t)$ es parametrización por longitud de arco, calcula la derivada $\gamma'(t)$ (usa las ecuaciones de Frenet de α) y demuestra que las normales afines a α son las tangentes afines de su evoluta. Concluye que **la evoluta es la envolvente de las normales afines.**

9. Dada la parábola $\alpha(t) \equiv (t, t^2)$, halla una parametrización para su evoluta por los dos métodos: primero usando la fórmula (1), después como envolvente de las normales afines de α. Comprueba que los dos métodos dan el mismo resultado.

Haz un dibujo conjunto de la parábola y su evoluta (que es una *parábola semicúbica*).

10. **(Construcción de las involutas).** Sea $\alpha(s)$ una curva plana parametrizada por arco. Dada cualquier constante c, demuestra que la curva

$$\beta(s) \;\equiv\; \alpha(s) - (s-c)\,\mathbf{t}_\alpha(s)\;,$$

es una trayectoria ortogonal de las tangentes afines de α, es decir que β es una de las *involutas* de α. Comprueba que, al cambiar el valor de c, resultan curvas *paralelas* y explica esto geométricamente mediante el ejercicio 6.

Deduce la construcción de las involutas bobinando o desbobinando un hilo sobre la curva.

11. Sea $\alpha(s)$ una curva plana parametrizada por longitud de arco. Demuestra que las normales afines de α equidistan de un punto fijado si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$k(s) \;\equiv\; \pm 1/\sqrt{as+b}\;.$$

12. Halla las involutas de una circunferencia. Relaciona el resultado con las curvas del ejercicio 11.