Hoja 1

1. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ caminos suaves.

   (a) Si $f : I \to \mathbb{R}$ es la función escalar definida por $f(t) \equiv \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle$, demuestra que $f'(t) = \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle$.

   (b) Si $g : I \to \mathbb{R}^3$ es la función vectorial definida por $f(t) = \alpha(t) \times \beta(t)$, demuestra que $g'(t) = \alpha'(t) \times \beta(t) + \alpha(t) \times \beta'(t)$.

   (c) Dada M, matriz constante 3×3, definimos una función vetorial $h : I \to \mathbb{R}^3$ mediante $h(t) = M\alpha(t)$. Demuestra que $h'(t) = M\alpha'(t)$.

2. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\alpha(t) : I \to \mathbb{R}^n$ un camino diferenciable que no pasa por el origen. Supongamos que $t_0 \in I$ es tal que $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más cercano al origen. Demuestra que el vector de posición $\alpha(t_0)$ es ortogonal a $\alpha'(t_0)$.

3. Sea $\alpha(t) : I \to \mathbb{R}^n$ un camino suave, con $0 \in I$. Sea $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ un vector fijado. Demuestra que son equivalentes:

   – α está contenido en un plano afín ortogonal a $\mathbf{c}$.

   – $\mathbf{c} \cdot \alpha(t)$ es función constante.

   – $\alpha'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{c}$ para todo t.

4. Sea $\alpha(t) : I \to \mathbb{R}^n$ un camino regular. Demuestra que $\|\alpha(t)\|$ es constante (no nula) si y sólo si $\alpha(t) \perp \alpha'(t)$ para todo t.

5. (Un nodo). La curva implícita $\{y^2 = x^2(x+1)\}$ es un ejemplo de **cúbica nodal.** Descríbela como unión de dos grafos del tipo $y = \text{función}\,(x)$ y usa esta descripción para hacer un dibujo de la curva (como subconjunto del plano xy).

   Después, para cada punto (x, y) de la curva con $x \neq 0$ describe x e y como funciones del número $t = y/x$. Comprueba que esto conduce a una parametrización $\alpha(t)$ que recorre toda la curva y explica cómo la recorre. En particular ¿es α inyectiva?

   Comprueba que el vector velocidad $\alpha'(t)$ nunca se anula.

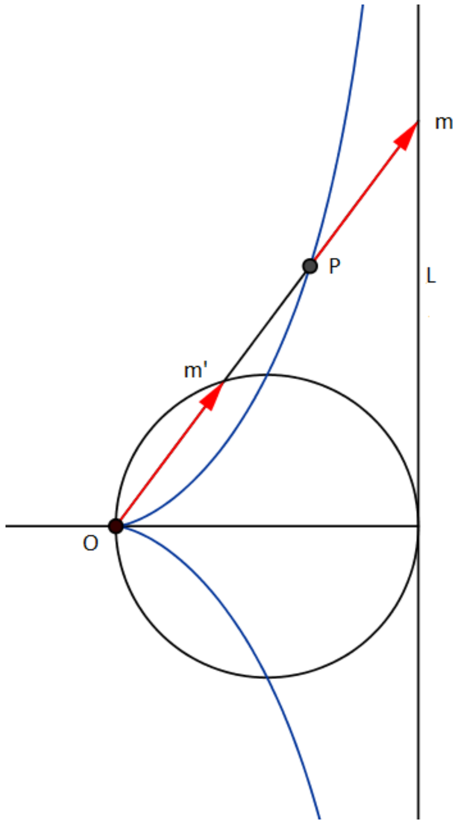
6. (Un tacnodo). Dado el camino $\alpha(t) \equiv \big(t^2 - 1\,,\, t(t^2-1)^2\big)$, comprueba que el vector velocidad $\alpha'(t)$ nunca se anula. Demuestra que la imagen $C = \alpha(\mathbb{R})$ puede darse implícitamente por $C = \{(x, y) \,:\, y^2 = x^4(x+1)\}$ y deduce una descripción de C como unión de dos grafos $\{y = h_i(x)\,,\, -1 \leq x < \infty\}$, $i = 1, 2$. Dibuja C y describe cómo es recorrida por α.

7. (La concoide[1] de Nicómedes). Fijamos $\ell > 0$. Sobre cada recta pasando por $(0, 0)$ consideramos tres puntos: el punto M de corte con la recta $\{x = 1\}$ y los dos puntos P_-, P_+ que están a distancia ℓ de M. La concoide de Nicómedes es el lugar geométrico de los puntos $P_\pm$.

   Para el valor $\ell = 1$ traza las dos componentes conexas de la correspondiente concoide mediante parametrizaciones. Esta curva es algebraica, encuentra una ecuación implícita y polinómica para la curva entera y dibújala. Hay un punto donde se anula el gradiente de la ecuación implícita ¿cómo es la curva en ese punto?

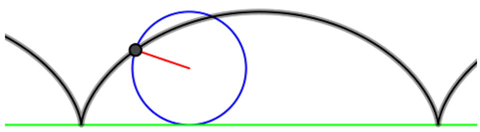
[1] "Concoide" significa "en forma de concha".

8. (La cisoide[2] de Diocles). Sea C la circunferencia de centro $(\frac{1}{2}, 0)$ y radio $\frac{1}{2}$. Sea L la recta tangente a C en el punto $(1, 0)$. Para cada punto $m \in L$, trazamos la recta que lo une con $O = (0, 0)$ y llamamos m' al corte de esa recta con C. La cisoide de Diocles es el lugar geométrico de los puntos P sobre estas rectas con el vector $\vec{Pm}$ igual al vector $\vec{Om'}$.



Traza la cisoide con una parametrización (indicación: primero parametriza L). Halla una ecuación implícita que sea polinómica. La cisoide es un ejemplo de cúbica **cuspidal** porque tiene un "punto áspero" (cúspide) que es justo donde se anula la velocidad de la parametrización y también es donde se anula el gradiente de la ecuación implícita.

9. (La cicloide). Consideramos un disco de radio 1 y marcamos un punto de su borde. Si el disco rueda sin resbalar por una recta horizontal entonces el punto marcado se mueve trazando una curva llamada **cicloide.**



Suponiendo que la recta horizontal es $\{y = -1\}$, demuestra que el siguiente camino parametriza la cicloide:

$$\alpha(t) \;=\; \big(\, t - \operatorname{sen} t \;,\; -\cos t \,\big) \quad , \quad -\infty < t < \infty \,.$$

Comprueba que la cicloide tiene cúspides, con las puntas hacia abajo, justo en los puntos donde se anula el vector velocidad de la parametrización.

Calcula la longitud del arco de cicloide comprendido entre dos cúspides consecutivas.

[2] *Kissós* significa hiedra en griego. Esta curva se parece al borde de una hoja de hiedra.

10. Encuentra una parametrización por longitud de arco de la siguiente curva:

$$\alpha(t) \equiv \Big(t \ , \ (3/2)\, t^{2/3} \Big) \quad , \quad t > 0\,.$$

Indicación: Observa que $\sqrt{1+t^{-2/3}} = t^{-1/3}\sqrt{t^{2/3}+1}$.

Sea b constante no nula. Halla una parametrización por longitud de arco de la **hélice circular:**

$$\alpha(t) \equiv (\, a\cos t\, ,\ a \operatorname{sen} t\, ,\ bt)\,.$$

11. **Tractriz:** es la curva que describe un esquiador acuático cuando la lancha remolcadora sigue una línea recta, y la fricción del líquido es tan importante que en vez de la ley de Newton (fuerza = masa $\cdot$ aceleración) se cumple la "ley" de Aristóteles (fuerza = constante $\cdot$ velocidad). Este sería el caso si, por ejemplo, el líquido fuera melaza en vez de agua.

Supongamos que la lancha se mueve por el semieje $\mathcal{O}y$ positivo, que la cuerda de arrastre tiene longitud 1 y que el esquiador parte del punto $(1,0)$. Sea $\gamma(s) \equiv \big(x(s)\, ,\, y(s)\big)$, $0 \leq s < \infty$, la parametrización por longitud de arco de la trayectoria del esquiador, con $\gamma(0) = (1,0)$. Según la ley de Aristóteles, la cuerda de arrastre es siempre tangente a la trayectoria del esquiador; usa esto para probar que los puntos $\gamma(s) + \gamma'(s)$ yacen sobre el eje y. Esto, junto con ser $\gamma(s)$ parametrización por longitud de arco, da dos EDOs para $x(s), y(s)$ y además tenemos datos iniciales. Resuelve esos dos problemas de dato inicial y halla fórmulas para $x(s), y(s)$ (deja $y(s)$ expresada como una integral).

Haz un dibujo de la tractriz.

12. Sea α curva *regular* en el plano.

    (a) Demuestra que α es un segmento de recta si y sólo si todas sus tangentes afines pasan por un mismo punto.

    (b) Demuestra que α es un arco de circunferencia si y sólo si todas sus normales afines pasan por un mismo punto.

(Plantea ambas cuestiones como EDOs de primer orden).

13. Sea $\alpha(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un camino suave. Demuestra que la longitud de α es mayor o igual que la distancia espacial entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$.

14. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ un camino diferenciable y $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un movimiento rígido. Demuestra que $\varphi \circ \alpha$ tiene la misma longitud que α.