HOJA 6 **Matemática Discreta** 2015/2016

1. Disponemos de n cerillas para formar palabras con las letras I (una cerilla) y V (dos cerillas). Sea P_n el número de palabras diferentes que podemos formar de esta forma utilizando las n cerillas.
   (a) Halla una fórmula de recurrencia para P_n.
   (b) ¿Qué relación tienen los P_n con los números de Fibonacci, F_n, definidos por la relación $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$? Justifica la respuesta.
   (c) Sea $P_{n,k}$ el número de palabras contadas en P_n que tienen k letras. Calcula $P_{n,k}$.
   (d) Utiliza los apartados b) y c) para demostrar la fórmula $F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$

2. Encuentra fórmulas explícitas para los términos de las sucesiones definidas por:

$$(a) \qquad u_0 = 0, u_1 = 1, \qquad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, \quad n \geq 2;$$
$$(b) \qquad u_0 = 1, u_1 = 3, \qquad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n, \quad n \geq 0.$$

3. Resolver las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\begin{array}{lll} (a) & u_{n+1} - u_n = 3n^2 - n & \text{para } n \geq 0, \ \text{con } u_0 = 3; \\ (b) & u_{n+1} - 2u_n = 2^n & \text{para } n \geq 0, \ \text{con } u_0 = 1; \\ (c) & u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 7 + n + n^2 & \text{para } n \geq 0, \ \text{con } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 2; \\ (d) & u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \times 2^n + 7 \times 3^n & \text{para } n \geq 0, \ \text{con } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 4. \end{array}$$

4. Nos regalan tres sellos y decidimos iniciar una colección. El año siguiente la incrementamos con 8 sellos más. Si cada año compramos un número de sellos igual al doble de los que compramos el año anterior, ¿al cabo de cuántos años habremos superado el millón de sellos?

5. Sea $M = \{A, B, C\}$ y sea S_n el número de listas de longitud n formadas con las letras de M que tienen las letras A en bloques de longitud par. Encontrar una relación de recurrencia para calcular S_n y resolverla.

6. (a) Encuentra la relación de recurrencia correspondiente al número de listas binarias de longitud n que no tienen unos consecutivos y halla una expresión explícita para dichas cantidades. (b) ¿Y en el caso de listas ternarias?

7. Consideramos las sucesión de números $\{I_n\}$ dada por

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, \qquad n \geq 0.$$

   (a) Comprobar que la sucesión $\{I_n\}$ verifica la relación de recurrencia $I_n = e - nI_{n-1}$, para $n \geq 1$, junto con la condición inicial $I_0 = e - 1$.

   (b) Para resolver la relación anterior, vamos a hacer un "cambio de variables": considera la sucesión (J_n) dada por

$$J_n = (-1)^{n+1} \frac{I_n}{n!\, e} \qquad \text{para cada } n \geq 0.$$

   y verifica que

$$J_n = J_{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

   (c) Obtener una fórmula para J_n y deducir la correspondiente fórmula para I_n.

8. Hallar las funciones generatrices de las sucesiones siguientes:

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \left(\binom{8}{0}, \binom{8}{1}, \ldots, \binom{8}{8}, 0, 0, \ldots\right) \\
(b) & \left(0, \binom{8}{1}, 2\binom{8}{2}, \ldots, 8\binom{8}{8}, 0, 0, \ldots\right) \\
(c) & (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots) \\
(d) & (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots) \\
(e) & (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)
\end{array}
$$

9. Determinar la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices:

$$
\begin{array}{llll}
(a) & f(x) = (2x-3)^3 & (d) & f(x) = \dfrac{1}{1+3x} \\
(b) & f(x) = \dfrac{x^4}{1-x} & (e) & f(x) = \dfrac{1}{1-x} + 3x^7 - 11 \\
(c) & f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2} & (f) & f(x) = \dfrac{1+3x-x^2+3x^3-x^4}{1-3x+3x^2-x^3}.
\end{array}
$$

10. Hallar el coeficiente de x^{31} en $(1 + x + x^2 + \cdots)^k$, $k \in \mathbb{N}$.
11. Resolver los ejercicios 2 y 3 con la técnica de las funciones generatrices.
12. Obtener, utilizando funciones generatrices, los valores de las siguientes sumas:

$$
a)\ \sum_k k\binom{n}{k}; \qquad b)\ \sum_k 3^{-k}\binom{n}{k}; \qquad c)\ \sum_{k=1}^{n} k^2; \qquad d)\ \sum_n \frac{n^2}{3^n}.
$$

13. Para cada $n \geq 0$, definimos

$$
a_n = \sum_k \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2^k}.
$$

   (a) Calcula el valor de a_n.

   (b) Calcula el valor de la suma $\sum_n \binom{n+1}{2} a_n$.

14. La sucesión de números $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ está definida mediante

$$
a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + c_{n-2} \qquad \text{para } n \geq 2,
$$

   donde $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una cierta sucesión cuya función generatriz es $g(x)$. Expresa, en términos de $g(x)$, la función generatriz $f(x)$ asociada a la sucesión $\{a_n\}$.

15. En una frutería se dispone de las siguientes frutas: manzanas, plátanos, naranjas y peras. Calcular el número de formas distintas de llenar una bolsa con n frutas respetando las siguientes restricciones:

   - El número de manzanas debe ser par.
   - El número de plátanos debe ser múltiplo de 5.
   - Hay como mucho 4 naranjas.
   - Hay como mucho 1 pera.