HOJA 2 **Matemática Discreta** 2015/2016

1. Demuestra con argumentos combinatorios las siguientes identidades:

   (a) $\displaystyle\binom{2n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$ (b) $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k}$ (c) $\displaystyle\binom{2n}{n}^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(n-k)!^2\, k!^2}$

   Sugerencia: Acuérdate de la propiedad de simetría para el apartado (a) y de que puedes clasificar los conjuntos en función de su mayor elemento para el apartado (b). Para (c) cuenta el número de maneras de elegir dos subconjuntos de tamaño n de $\{1, \ldots, 2n\}$ no necesariamente disjuntos.

2. Se lanzan 3 dados indistinguibles. ¿Cuántos posibles resultados (no cuántas sumas sino cuántos posibles valores de los 3 dados) pueden obtenerse? ¿Y si fueran n dados indistinguibles?

3. Tenemos una baraja española “defectuosa”, cuyas 40 cartas son todas de oros, de manera que las 10 cartas del palo de oros están repetidas 4 veces. ¿De cuántas formas podemos ordenarla?

4. En el programa *Cifras y letras* han aparecido las letras `AHUCAMEEN`. ¿Cuántas palabras (con o sin sentido) de longitud 6 se pueden formar?

5. Si lanzamos 100 veces una moneda, ¿qué es más probable, que salgan entre 47 y 53 caras (ambas incluidas) o que no? (Para responder, considera que lanzamos las monedas en orden).
   Y si lanzamos 1000 veces una moneda ¿qué es más probable, que salgan entre 470 y 530 caras (ambas incluidas) o que no?
   Sugerencia: podéis usar el servidor de Sage: cosmos.mat.uam.es
   La instrucción para calcular $\sum_{n=0}^{k} \binom{N}{n}$ es: sum([binomial(N,n) for n in srange(k+1)])

6. Obtén una fórmula para el número de palabras de longitud $4n$ que podemos formar con los bloques `as` y `coco`.

7. Una torre de ajedrez está situada en la casilla inferior izquierda del tablero (8×8), con la intención de llegar a la esquina opuesta en cuatro movimientos, avanzando en cada uno de ellos hacia arriba o hacia la derecha. ¿De cuántas maneras lo puede hacer? (*Nota*: la torre no puede quedarse quieta en ninguno de los 4 movimientos).

8. Al lanzar 5 dados, ¿la probabilidad de que la suma de los dados sea 18 es mayor que el 10%?

9. ($\star$) En un juego se lanza una moneda: si sale cara ganas 1 euro y si sale cruz pierdes 1 euro. Si comienzas con 1 euro y quieres jugar 50 partidas, ¿cuál es el número de juegos en los que acabas ganando dinero (ten en cuenta que si te quedas en 0 euros no puedes seguir apostando)?

10. (a) Comprueba que el número de listas de longitud n con ceros y unos en las que hay exactamente r unos y que no tienen unos consecutivos es $\binom{n-r+1}{r}$.
    (b) ¿De cuántas formas distintas se puede extraer de $\{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto de r números de forma que no haya dos consecutivos?

11. Consideramos el conjunto de símbolos $X = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$. Diremos que un subconjunto A de X está *separado* si la diferencia entre cualesquiera dos de sus elementos es al menos tres unidades. Por ejemplo, $\{10, 15, 17, 40\}$ no está separado, mientras que $\{10, 15, 18, 40\}$ sí lo está. ¿Cuántos subconjuntos separados distintos de cinco elementos se pueden formar con los elementos de X?

12. ¿De cuántas formas se puede confeccionar una lista de 12 términos con las letras a, b y c de forma que aparezcan dos aes, dos bes y ocho ces, y además cada a y cada b tengan una c a ambos lados?

13. (a) ¿Cuántas permutaciones de 20 elementos distintos dejan exactamente 4 de ellos fijos?
    (b) Llamamos $D_n(k)$ al número de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que fijan exactamente k elementos. Da una fórmula para $D_n(k)$ en función del número de desbarajustes de cierto número de elementos.

14. Observa que $\sum_{k=0}^{n} D_n(k) = n!$. Prueba que:

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k D_n(k) = 1,$$

    es decir, en media, una permutación deja fijo un elemento.
    Sugerencia: Puedes usar el apartado (b) del ejercicio anterior, la propiedad de simetría de los coeficientes binómicos y la observación de que $(n-j)\binom{n}{j} = n\binom{n-1}{j}$.

15. Demuestra que $k^n/k^k \leq S(n,k) \leq k^n/k!$.
    Sugerencia: puedes usar la fórmula de recurrencia de $S(n,k)$ y que el número de aplicaciones sobreyectivas de A a B es menor o igual que el número de aplicaciones de A a B.

16. (a) Comprueba que $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ y que $S(n, n-2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$. Halla una fórmula análoga para $S(n, n-3)$.
    (b) Por otro lado, sabemos que $S(n, 2) = \frac{2^n - 2}{2}$. Halla una fórmula para $S(n, 3)$.

17. Consideramos n ciudades. Durante $2n$ días un viajero va anotando la ciudad en la que pernocta. Al final del viaje debe haber dormido en todas las ciudades. Teniendo en cuenta que podría dormir varias veces seguidas (o alternas) en la misma ciudad, ¿cuántos itinerarios distintos podría haber hecho el viajero?

18. (a) Comprueba que $p_2(n) = \lfloor n/2 \rfloor$.
    (b) Demuestra que, para k fijo, $p_k(n)$ es una función decreciente en n.

19. ($\star$) Calcula el número total de particiones de 12 en sumandos positivos que tienen todos sus sumandos distintos.