1. ¿Se puede asegurar que hay (al menos) dos españoles tales que tengan: la misma inicial de su (primer) nombre, la misma inicial de su primer apellido, la misma letra del DNI, y que celebren su cumpleaños el mismo día? (*Nota*: hay 27 posibles iniciales pero solamente 23 posibles letras del DNI).

2. Demostrar que en cualquier reunión siempre hay dos personas que tienen el mismo número de amigos (en dicha reunión). (*Nota*: ser amigos es algo mutuo).

3. Demostrar que existe una potencia de 3 cuya expresión decimal acaba en 001.

4. ($\star$) Dado un conjunto S de n números naturales, probar que existe algún subconjunto no vacío de S tal que la suma de sus elementos es múltiplo de n.

5. Se colorea el plano ($\mathbb{R}^2$) con dos colores (es decir, a cada punto del plano se le asigna uno de esos dos colores). Demuestra que hay dos puntos a distancia 1 del mismo color.

6. En una clase se imparten 5 asignaturas, con dos posibles calificaciones cada una: suspenso y aprobado. ¿Cuántos alumnos tenemos que escoger para estar seguros de que 3 de ellos tienen las mismas notas en las 5 asignaturas?

7. Probar que en cualquier reunión de 6 personas o bien 3 de ellas se conocen entre sí o bien 3 de ellas no se conocen entre sí. (*Nota*: conocerse es algo mutuo).

8. ($\star$) Demuéstrese que en cualquier subconjunto de $n+1$ elementos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ hay un elemento que divide a otro (esta cuestión se debe a Paul Erdös). (*Indicación*: constrúyanse los palomares en función del máximo divisor impar de cada número).

9. En una quiniela hay 14 partidos con tres resultados posibles cada uno: 1, X, 2. ¿Cuántas quinielas debes rellenar para estar seguro de acertar los 14 partidos? Estás de suerte porque un adivino asegura que en la siguiente jornada no van a salir signos consecutivos iguales. Si el adivino está en lo cierto, ¿cuántas quinielas debes rellenar?

10. Calcula el número de permutaciones de la palabra ABCDEFG que contengan:
    (a) La secuencia ABC (b) Las secuencias AB, CD y EF (c) Las secuencias AB, BC y EF.

11. ¿De cuántas maneras podemos ordenar las 27 letras del alfabeto de forma que A y B no aparezcan consecutivamente? ¿Y si además A y C no pueden aparecer consecutivamente?

12. Calcula el número de funciones inyectivas de un conjunto de 7 elementos en un conjunto de 10 elementos. Calcula también el número de maneras de distribuir 5 bolas distintas en 8 cajas distintas si en cada caja puede haber como mucho una bola.

13. ¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 tienen exactamente un 8 y un 9 en su expresión decimal? ¿Cuántos números naturales tienen en su expresión en base 10 todos sus dígitos distintos?

14. Disponemos de cuentas de n colores distintos. Disponemos además de un cierre de collar formado por dos piezas distintas (que se pueden enganchar entre sí para cerrarlo). Queremos formar, escogiendo k cuentas de distintos colores y poniendo una de las piezas del cierre a cada lado, un collar. ¿De cuántas formas podemos hacerlo? ¿Y si las dos piezas del cierre fueran idénticas? ¿Y si no utilizáramos las piezas del cierre y cerráramos el collar de manera que no se apreciara el lugar en que lo hacemos?

15. Vamos a fabricar tarjetas de identificación poniendo símbolos en las casillas de una matriz 3×3. En las filas pueden repetirse los símbolos, pero los tres de cada columna han de ser distintos. ¿Cuántos símbolos son necesarios como mínimo si queremos que haya al menos 10^9 tarjetas distintas? (*Indicación*: hágase la cuenta por columnas).

16. Hállense los cardinales de los siguientes conjuntos (*Nota*: puede ayudar pintar los números de distinto color según su pertenencia a A, $B \ldots$):

$$\begin{aligned} X &= \{(A,B) \ : \ A,B \subseteq \{1,\ldots,n\},\ A \cap B = \emptyset\}, \\ Y &= \{(A,B) \ : \ A,B \subseteq \{1,\ldots,n\},\ A \subseteq B\} \\ Z &= \{(A,B) \ : \ A,B \subset \{1,\ldots,n\},\ A \subsetneq B\}. \end{aligned}$$

17. Tenemos un conjunto X y los subconjuntos suyos $A_1, \ldots, A_k$. Pruébense las siguientes relaciones (*Nota*: puede emplearse inducción):

(a) $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| \ \leq \ \min_{j=1,\ldots,k} |A_j|$ (b) $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| \ \geq \ \sum_{j=1}^{k} |A_j| - (k-1)|X|$

(c) $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| \ \leq \ \sum_{j=1}^{k} |A_j|$ (d) $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| \ \geq \ \sum_{j=1}^{k} |A_j| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$.

18. Un acertijo (algo truculento) debido a Lewis Carroll: En una batalla entre 100 combatientes, 80 perdieron un brazo, 85 una pierna, 70 un ojo y 75 una oreja. Un número x de ellos perdió las cuatro cosas. Demuéstrese que $10 \leq x \leq 70$. ¿Se pueden mejorar estas estimaciones? (*Nota*: el ejercicio anterior podría ayudarte).

19. ¿Cuántos números naturales menores que 60000 son primos con 30?

20. ¿Cuántas palabras distintas de 7 letras podemos formar con las letras del alfabeto castellano (27 letras), permitiendo repeticiones de las letras, tales que no contengan la secuencia BOB?

21. ($\star$) Sea p un número primo y n un entero positivo. ¿Cuál es la potencia de p en la descomposición en factores primos de $n!$? Hallar el número de ceros en que termina 200!

Nota: Los ejercicio marcados con ($\star$) son un poco más difíciles.