3.4. Distribuciones de bolas en cajas

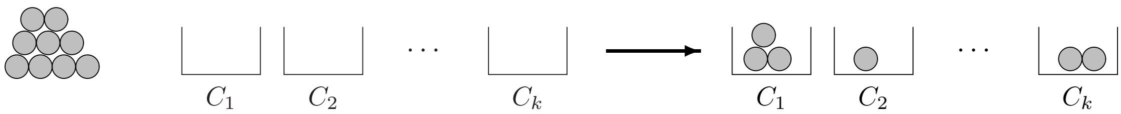
Una gran cantidad de cuestiones combinatorias pueden ser descritas y codificadas en términos de distribuciones de bolas en cajas. Así que conviene tener a mano un vademécum que incluya los principales casos, clasificados en función de si las bolas y las cajas son distinguibles o no (incluyendo, además, las restricciones más habituales sobre la distribución).

Las bolas serán los objetos que distribuiremos en las cajas, y supondremos que dentro de las cajas el orden no es relevante. En los ejercicios de esta sección hemos incluido, además, algunas preguntas sobre distribuciones de bolas en *tubos* (cajas en cuyo interior el orden será también importante).

En todo lo que sigue, los parámetros n y k serán enteros positivos. Usaremos los términos "idénticas" y "no numeradas" cuando los objetos de interés (quizás las bolas, quizás las cajas) sean indistinguibles. Cuando sean distinguibles, también utilizaremos los términos "numeradas" y "distintas". Por ejemplo, cuando digamos que n cajas están numeradas, querremos significar que les hemos asignado números distintos de 1 a n.

A. Bolas idénticas, cajas numeradas

Tenemos n bolas idénticas, que queremos distribuir en k cajas numeradas. Véanse, en el dibujo, las n bolas, dispuestas a ser introducidas en las cajas.



A la derecha ya se ha hecho esa distribución. Obsérvese que, para determinar una de estas distribuciones, basta decidir cuántas bolas van en la caja 1, cuántas en la 2, etc., puesto que, como las bolas son indistinguibles, no tiene sentido preguntarse por *qué* bolas van en cada caja. Así que una distribución de éstas se puede codificar como una lista de números $(x_1, \dots, x_k)$ cuya suma vale

$$x_1 + \cdots + x_k = n\,.$$

En principio, la única restricción sobre los x_j es que sean enteros no negativos.

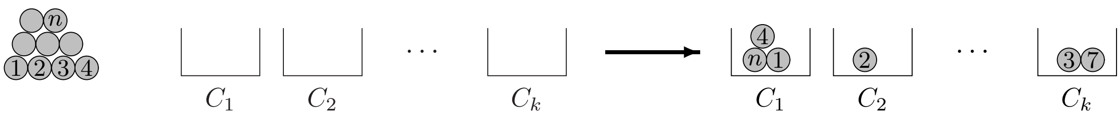
Esta cuestión sobre el número de soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas ya la analizamos con detalle en la subsección 3.1.3, en la que el lector encontrará los argumentos que justifican las respuestas de este apartado. Los casos más relevantes son:

- si no permitimos que queden cajas vacías (esto es, si exigimos que $x_j \geq 1$). Obsérvese que si $n < k$, no hay ninguna distribución posible. Pero si $n \geq k$, el número de distribuciones posibles es
$$\binom{n-1}{k-1} \qquad \text{para } n \geq k \geq 1.$$
- En el caso general, en que permitimos que alguna caja pudiera quedar vacía, las restricciones son $x_j \geq 0$. Entonces k puede tomar cualquier valor y la respuesta es
$$\binom{n+k-1}{k-1} \qquad n \geq 1\,,\ k \geq 1.$$

Otro tipo de restricciones para los x_j (cotas por arriba y por debajo) fueron estudiadas en la subsección 3.1.3, y remitimos a ella al lector que pudiera estar interesado (véase también el ejercicio 3.4.1).

B. Bolas y cajas numeradas

Consideremos ahora n bolas numeradas y k cajas numeradas. La cuestión que nos interesa nuevamente es determinar de cuántas maneras se pueden distribuir las bolas en las cajas, pero ahora sí que podemos (y debemos) distinguir qué bolas van en cada caja:



Éste es también una cuestión que ya hemos tratado ampliamente. Teniendo en cuenta los ingredientes del problema, la mejor manera de codificar una distribución de éstas es mediante una lista de n posiciones, en cada una de las cuales puede ir, en principio, un elemento cualquiera del conjunto $\{1,\dots,k\}$. En la posición j informamos de a qué caja (un número entre 1 y k) ha ido la bola j.

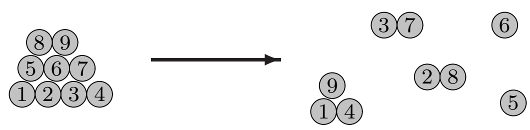
En otros términos, que también hemos considerado, son las aplicaciones de un conjunto con n elementos en uno con k elementos. Los casos más relevantes son:

- si pueden quedar cajas vacías (esto es, si la lista es sin restricciones, o si queremos contar todas las posibles aplicaciones), entonces k puede tomar cualquier valor y la respuesta es
$$k^n\,.$$
- Si no permitimos cajas vacías (es decir, si en la lista deben aparecer todos los símbolos de $\{1,\dots,k\}$, o bien si queremos contar las aplicaciones sobreyectivas), entonces n ha de ser $\geq k$ y la respuesta es
$$k!\,S(n,k)\,,$$
donde los $S(n,k)$ son los números de Stirling de segunda especie, a los que dedicamos la subsección 3.3.1 (allí podrá encontrar el lector fórmulas explícitas para ellos, así como la regla de recursión que permite calcularlos).
- Supongamos ahora que nos interesa contar el número de distribuciones de n bolas numeradas en cajas numeradas, de manera que ninguna de éstas quede vacía, pero cuando no fijamos *a priori* el número de cajas. La respuesta es, entonces,
$$\sum_{k=1}^{n} k!\,S(n,k)\,,$$
una cantidad que recibe el nombre de n-ésimo número de Bell ordenado, y que denotamos por $\tilde{B}(n)$. De estos números ya hablamos en el ejercicio 3.3.4.
- Si exigimos que las bolas vayan en cajas distintas (lo que sólo es posible si $n \leq k$), entonces la respuesta es
$$k(k-1)\cdots(k-n+1)\,.$$

Recordamos también que si tenemos una información mucho más detallada, como es la de que en la distribución de las n bolas en k cajas vayan a_j bolas en la caja j, donde $a_1+\cdots+a_k = n$, entonces la respuesta es (véase la subsección 3.1.6) el coeficiente multinómico

$$\binom{n}{a_1,\ldots,a_k}.$$

C. Bolas numeradas, cajas idénticas



Tenemos n bolas numeradas, que queremos distribuir en k cajas idénticas. Estamos partiendo un conjunto de n elementos en k bloques. Junto a estas líneas exhibimos una distribución de éstas para $n = 9$ y $k = 5$. Dibujamos los bloques como “montones desperdigados” para insistir en la idea de que no están ordenados (no hay bloque 1, bloque 2, etc.).

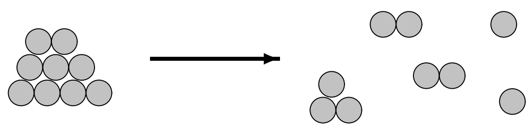
Parece razonable suponer que los bloques sean no vacíos[34]. Entonces n ha de ser $\geq k$ y la respuesta es, simplemente,

$$S(n,k)\,.$$

Si sólo fijamos n, el número de bolas (numeradas), pero no el número de bloques, entonces la respuesta es el número total de particiones del conjunto $\{1,\ldots,n\}$, que conocemos como el n-ésimo número de Bell $B(n)$:

$$B(n) = \sum_{j=1}^{n} S(n,j)\,.$$

D. Bolas y cajas idénticas



Tenemos n bolas y k cajas. Ahora no podemos distinguir entre las bolas ni entre las cajas. Véase en el dibujo una distribución para $n = 9$ y $k = 6$. Estas distribuciones se corresponden con las particiones del entero n (revísese la subsección 3.3.3). De nuevo suponemos que las cajas no son vacías (véase den nuevo la nota al pie). Entonces, necesariamente n debe ser $\geq k$ y la respuesta es el número de particiones de n con exactamente k partes,

$$p_k(n)\,.$$

Si, como antes, no fijamos el número de cajas (el número de partes de la partición), entonces la respuesta es el número total de particiones del entero n:

$$p(n) = \sum_{j=1}^{n} p_j(n)\,.$$

Conviene recordar que para estos números $p_k(n)$ y $p(n)$ no disponemos de unas fórmulas explícitas, aunque sí reglas de recurrencia (recuérdese la subsección 3.3.3).

[34] Reflexione, sin embargo, el lector sobre lo que ocurriría si permitiéramos bloques vacíos, qué valores podría tomar k y cuál sería la respuesta en ese caso.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.4

3.4.1 *Clasifíquense las distribuciones de n bolas idénticas en k cajas numeradas en función del número de cajas que vayan realmente llenas para recuperar la fórmula de Vandermonde (véanse, por ejemplo, las páginas 112 y 134).*

3.4.2 *Sea $f(n,k)$ el número de formas de poner n bolas numeradas en k* ***tubos*** *numerados. El diámetro del tubo es sólo un poco mayor que el diámetro de las bolas, de forma que podemos distinguir el orden de las bolas dentro de cada tubo. Permitimos que algunos tubos queden vacíos (así que k puede tomar cualquier valor). Compruébese que*

$$f(n,k) = k(k+1)\cdots(k+n-1)$$

(a) por inducción en n, el número de bolas;

(b) con un argumento combinatorio: una distribución de éstas es una lista de $n+k-1$ posiciones en las que situamos n símbolos distintos (las bolas), así como $k-1$ separadores idénticos (que marcan dónde empieza cada tubo);

(c) suponiendo, por un momento, que las bolas son indistinguibles (de manera que los tubos se "conviertan" en cajas), para luego volver a la situación original.

3.4.3 *Queremos contar ahora las formas de distribuir n bolas numeradas en k tubos numerados, pero donde no permitimos que queden tubos vacíos (así que $n \geq k$). Compruébese que la respuesta es ahora*

$$\binom{n}{k} k!\, f(n-k,k) \qquad \text{o, en otros términos,} \qquad n!\binom{n-1}{k-1}.$$

3.4.4 *Sea $g(n,k)$ el número de formas de distribuir n bolas numeradas en k tubos idénticos, donde no permitimos que queden tubos vacíos (así que $n \geq k$). Compruébese que*

$$g(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$

Dedúzcase que, si permitimos tubos vacíos, la respuesta es

$$\sum_{j=1}^{\text{mín}(n,k)} \frac{n!}{j!}\binom{n-1}{j-1}.$$

3.4.5 *Compruébese, finalmente, que si las bolas no están numeradas (da igual si los tubos lo están o no), los tubos son, simplemente, cajas (y se aplican los resultados correspondientes).*