3.3. Particiones y descomposiciones

Una cuestión muy habitual en Combinatoria consiste en contar de cuántas maneras se puede partir o descomponer, en piezas sencillas, un cierto objeto conocido:

- Podemos preguntarnos, por ejemplo, cuántas maneras hay de partir un *conjunto* en *subconjuntos* suyos. La respuesta la encontraremos en la subsección 3.3.1.
- También nos interesará saber cuántas *permutaciones* hay con un determinado número de *ciclos* (véase la subsección 3.3.2).
- Finalmente, nos ocuparemos también de contar de cuántas maneras se puede escribir un *entero* (positivo) como suma[29] de *enteros* también positivos (véase la subsección 3.3.3).

3.3.1. Particiones de conjuntos

Partir un conjunto en subconjuntos (disjuntos dos a dos), para luego aplicar la regla de la suma, es una de las estrategias básicas de la Combinatoria, como ya vimos en la sección 2.3. La cuestión que aquí nos interesa es saber *de cuántas maneras distintas* se puede partir un conjunto dado.

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto con n elementos, que supondremos, como hacemos habitualmente, que son los números $\{1,\dots,n\}$. Una **partición en k bloques no vacíos** de $\mathcal{X}$ será una colección de subconjuntos $\{A_1, A_2, \dots A_k\}$ (los "bloques") tales que

1. los bloques, efectivamente, conforman una partición de $\mathcal{X}$:
$$\mathcal{X} = A_1 \cup \cdots \cup A_k \quad \text{y} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{para cada } i \neq j.$$
2. Y los bloques son no vacíos, esto es, $A_i \neq \emptyset$ para cada $i = 1,\dots,k$.

Es fundamental señalar que, por un lado, *el orden de los elementos dentro de cada bloque es irrelevante* (por eso hablamos de subconjuntos); y, por otro, que *el orden de presentación de los bloques* también es irrelevante. Pese a que nombramos los bloques como $A_1,\dots,A_k$, no debe suponer el lector que estemos dando un orden entre ellos.

Por ejemplo, si $\mathcal{X}$ fuera el conjunto $\{1,2,3\}$, tendríamos una única partición con un bloque (el propio conjunto $\{1,2,3\}$), tres particiones con dos bloques,
$$\{1,2\} \cup \{3\}, \qquad \{1,3\} \cup \{2\}, \qquad \{2,3\} \cup \{1\}\,;$$
y una partición en tres bloques, $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$. Ya no hay más, pues queremos que los bloques no sean vacíos. Insistimos en que, por ejemplo, $\{1,2\}\cup\{3\}$, $\{3\}\cup\{1,2\}$ ó $\{3\}\cup\{2,1\}$ representan la misma partición.

Definimos los **números de Stirling de segunda especie**[30] $S(n,k)$ como
$$S(n,k) = \#\big\{\text{ particiones distintas del conjunto } \{1,\dots,n\} \text{ en } k \text{ bloques no vacíos}\big\}\,.$$

[29]Sin duda el lector conoce otra forma de descomponer un entero, la que consiste en escribir el entero como *producto* de primos. Una cuestión sumamente interesante, a la que dedicaremos una atención especial en la subsección 4.1.5. Pero dado que, como es bien sabido, la citada descomposición es *única*, entenderá el lector que no la tratemos en una sección como ésta, cuyo *leit motiv* es "¿de cuántas maneras se puede hacer?".

[30]Hay, claro, números de Stirling de primera especie (véase la subsección 3.3.2).

En un lenguaje alternativo, $S(n,k)$ cuenta también el número de posibles distribuciones de n bolas numeradas (antes, los elementos del conjunto) en k cajas indistinguibles (los bloques de la partición), de manera que ninguna caja quede vacía.

Una nueva familia aparece para poblar el hábitat combinatorio. Como hicimos con los coeficientes binómicos, trataremos de obtener una fórmula explícita para ellos o, al menos, una regla de recurrencia que facilite su cálculo.

Empezamos determinando el rango de valores de los parámetros n y k. Por un lado, exigiremos que $n \geq 1$ (si el conjunto ya es vacío, difícilmente vamos a poder partirlo en bloques no vacíos). Fijado n, si ocurriera que $k > n$, entonces no podríamos construir ninguna partición (nos faltarían símbolos para llenar los bloques), así que

$$S(n,k) = 0 \quad \text{si } k > n.$$

De manera que el rango de interés es $n \geq 1$ y, para cada n, $1 \leq k \leq n$.

El número total de particiones de $\{1,\dots,n\}$ en bloques no vacíos se obtendrá clasificando las particiones según el número de bloques que contengan; por la regla de la suma, habrá

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$

particiones distintas del conjunto $\{1,\dots,n\}$ (o distribuciones de n bolas numeradas en cajas idénticas sin que queden cajas vacías). Los $B(n)$ son conocidos como **números de Bell**.

Por ejemplo, hemos visto que, para $n = 3$, $S(3,3) = 1$, $S(3,2) = 3$ y $S(3,1) = 1$; y, en total, habrá $B(3) = 5$ particiones distintas del conjunto $\{1,2,3\}$.

Veamos algunos casos sencillos. Para empezar, lo que por analogía con el análisis de los coeficientes binómicos llamaremos "valores frontera" de los números de Stirling de segunda especie: $S(n,n)$ y $S(n,1)$:

- Si tenemos n símbolos y pretendemos formar n bloques no vacíos con ellos, sólo queda la posibilidad de situar un símbolo por bloque. Es decir, $S(n,n) = 1$ para cada $n \geq 1$. Permítanos el lector describir esta partición, de manera algo informal pero ilustrativa, como aquélla en la que cada símbolo va "por su cuenta".
- Si de nuevo partimos de n símbolos, pero ahora sólo tenemos un bloque, la única manera de hacer la partición es colocar todos los símbolos en ese bloque. Esto es, $S(n,1) = 1$ para cada $n \geq 1$. Esta partición es la de "todos juntos".

Hasta aquí, todo igual al caso de los coeficientes binómicos. Analicemos un par de casos más.

Ejemplo 3.3.1 *El valor de $S(n,n-1)$, para $n \geq 2$.*

Por definición, $S(n,n-1)$ cuenta el número de particiones de $\{1,\dots,n\}$ en $n-1$ bloques no vacíos. Observemos que sólo hay una configuración posible, la que corresponde a tener un bloque con dos símbolos, y el resto de los símbolos, cada uno en un bloque distinto[31]. Decidir

[31] Sencilla aplicación del principio del palomar: como hay n símbolos y $n-1$ bloques, necesariamente uno de los bloques ha de llevar al menos dos símbolos. Y si queremos que todos los bloques sean no vacíos, entonces sólo queda la posibilidad de que un bloque lleve dos símbolos, y el resto uno.

qué configuración de éstas tenemos exige únicamente determinar qué dos símbolos van juntos, pues el resto de los símbolos se deben situar uno en cada uno de los demás bloques. Así que, después de todo, sólo hay que elegir dos elementos, por lo que concluimos que

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2}.$$

♣

Ejemplo 3.3.2 *El valor de $S(n, 2)$, para $n \geq 2$.*

Ahora tenemos dos bloques, y bastará decidir qué elementos van en uno de los bloques (los del otro quedan fijados). Note el lector que no tiene sentido hablar de "primer bloque" y "segundo bloque", pues éstos son indistinguibles. Aún así, emplearemos el truco habitual de asignar un orden auxiliar y ficticio a los bloques, que luego compensaremos al final. Digamos entonces que los bloques son

$$\lfloor \text{Bloque 1} \rfloor \quad \lfloor \text{Bloque 2} \rfloor$$

En el primero, en principio, podemos situar cualquier subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$; y hay 2^n de ellos. Pero no podemos utilizar ni el $\emptyset$ (porque el bloque 1 sería vacío) ni todo $\{1, \ldots, n\}$ (porque el bloque 2 quedaría vacío). Así que la respuesta sería $2^n - 2$.

Ahora debemos compensar el orden espurio que hemos introducido. Digamos que A es un subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$, una de las $2^n - 2$ elecciones posibles que citábamos antes. En el proceso que hemos hecho estamos distinguiendo entre

$$\lfloor A \rfloor \ \lfloor \{1, \ldots, n\} \setminus A \rfloor \qquad \text{y} \qquad \lfloor \{1, \ldots, n\} \setminus A \rfloor \ \lfloor A \rfloor$$

Estas dos configuraciones, vistas como particiones en bloques (esto es, sin orden entre los bloques) son en realidad la misma. Así que la respuesta correcta es

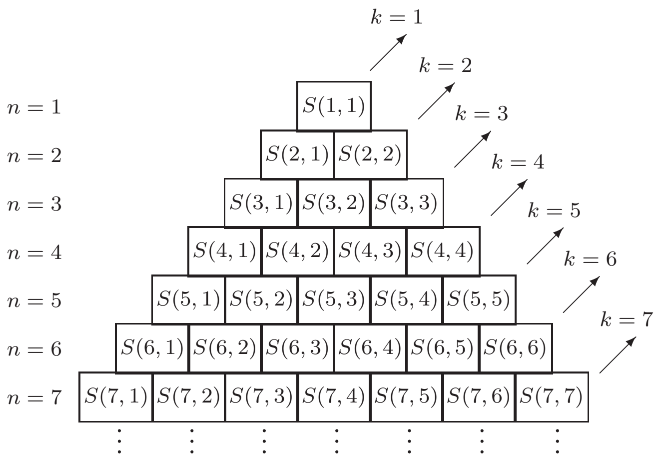
$$S(n, 2) = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1\,.$$

Nos gusta, es más sencillo argumentar cuando podemos referirnos a un bloque en concreto. Arriba impusimos un orden ficticio entre bloques, que luego supimos compensar, y que nos permitió hablar de bloque 1 y bloque 2. Un análisis alternativo, que emplearemos varias veces más adelante, es el siguiente. Vamos a referirnos al bloque que contiene a un elemento particular, por ejemplo el elemento n. No es primer bloque ni segundo bloque, sino simplemente "el bloque que contiene a n". Pero ahora que tenemos un bloque "distinguido", basta con decidir qué elementos acompañan a n en "su" bloque; o quizás qué es lo que va en el "otro" bloque. La respuesta es directa: hay $2^{n-1} - 1$ posibilidades, todos los posibles subconjuntos (¡con $n - 1$ símbolos!, que n ya está colocado), excepto el vacío. ♣

Quizás el lector quiera intentar el análisis de casos más complicados (3 bloques, o quizás $n-2$ ó $n-3$ bloques), como proponemos en el ejercicio 3.3.1. Observará, por un lado, que cada caso requiere un argumento combinatorio *ad hoc*, y que además el aspecto de las fórmulas que se obtienen no permite albergar muchas esperanzas de llegar a una fórmula general sencilla. Por ejemplo, $S(n, 2) = \binom{n}{2}$, mientras que $S(n, n-1) = 2^{n-1} - 1$. Esta tal fórmula general existe, aunque, como verá el lector, es bastante complicada. La obtendremos en el apartado B de esta subsección, aunque antes analizaremos un procedimiento de cálculo alternativo.

A. Regla de recurrencia para los números de Stirling de segunda especie

Queremos representar los valores de $S(n,k)$ en un triángulo como el que utilizábamos para codificar los coeficientes binómicos. Las coordenadas de cada casilla son (piso) n y (diagonal) k, que ahora recorren unos rangos ligeramente distintos al caso de los coeficientes binómicos. Nótese que, si conociéramos todos los valores de $S(n,k)$ para un cierto piso n, el número de Bell $B(n)$ correspondiente se obtendría, simplemente, sumándolos. Sabemos ya que $S(n,n) = S(n,1) = 1$ para todo n, así que tenemos los valores de la frontera del triángulo.



Inspirados por los coeficientes binómicos, querríamos expresar $S(n,k)$ (que estará en una casilla del piso n) en términos de números de Stirling de primer índice $n-1$ (casillas del piso anterior). Esto exigiría relacionar particiones de conjuntos con n símbolos con particiones de conjuntos $n-1$ símbolos. Para ello, analizaremos qué puede ocurrir con un bloque especial, por ejemplo el que contiene al elemento n. Caben dos posibilidades excluyentes:

$\boxed{\text{Caso 1}}$ *El bloque que contiene a n no contiene ningún otro elemento.* Una partición de éstas tendrá el siguiente aspecto:

$$\underbrace{\sqcup\ \ \sqcup\ \ \sqcup\ \ \cdots\ \ \sqcup}_{k-1 \text{ bloques}} \quad \boxed{n}$$

Insistimos en que en el esquema anterior no se está suponiendo orden alguno entre bloques: simplemente identificamos el bloque que contiene a n, que en este caso no contiene nada más. Pero ahora, como n va en un bloque (y "por su cuenta"), sólo queda construir una partición del conjunto $\{1,\dots,n-1\}$ en $k-1$ bloques no vacíos, para que en total tengamos k bloques.

Más formalmente, hay una biyección entre el conjunto de las particiones de $\{1,\dots,n\}$ en k bloques en las que n va solo en un bloque y el conjunto de las particiones de $\{1,\dots,n-1\}$ en $k-1$ bloques no vacíos. El diccionario, la biyección, es simplemente "quitar el bloque $\{n\}$" o "añadir el bloque $\{n\}$". De manera que hay $S(n-1,k-1)$ particiones de este primer tipo.

$\boxed{\text{Caso 2:}}$ *El bloque que contiene a n tiene, además, otros elementos.* ¿Podremos contar con la misma receta? Veamos un ejemplo: sea $\mathcal{X} = \{1,2,3,4\}$ y $k=2$. Nos interesan las particiones en las que que el bloque con el 4 contiene, además, otros elementos. Dos distintas serían

$$\{1,2\} \cup \{3,4\} \quad \text{y} \quad \{3\} \cup \{1,2,4\}\,.$$

Ahora no podemos hablar de "quitar el bloque $\{4\}$", pero aún podríamos intentar una regla del tipo "quitar el elemento 4". Pero no, no funciona, porque, por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{lcl} \{1,2\}\cup\{3,4\} & \longrightarrow & \{1,2\}\cup\{3\} \\ \{3\}\cup\{1,2,4\} & \longrightarrow & \{1,2\}\cup\{3\} \end{array}\right] \longrightarrow \text{¡dan lugar a la misma partición!}$$

Aún así, no descartemos completamente el argumento. Pensemos en el proceso al revés, "añadir 4". Dada la partición con dos bloques $\{1,2\}\cup\{3\}$, podemos situar el 4 en cualquiera de ellos

$$\{1,2\}\cup\{3\} \qquad \longrightarrow \qquad \{1,2,4\}\cup\{3\} \quad \text{y} \quad \{1,2\}\cup\{3,4\}$$

para dar lugar a una partición de $\{1,2,3,4\}$ en dos bloques, con el 4 "acompañado".

Hagamos el argumento en general: tenemos las $S(n-1,k)$ particiones del conjunto $\{1,\dots,n-1\}$ en k bloques. Para cada una de ellas, añadimos el elemento n en alguno de los bloques. Tendremos k posibilidades para colocarlo:

$$\underbrace{\{\cdots\}\,\{\cdots\}\,\cdots\,\{\cdots\}}_{k \text{ bloques}} \quad \longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} \{\dots,n\}\,\{\cdots\}\,\cdots\,\{\cdots\} \\ \{\cdots\}\,\{\dots,n\}\,\cdots\,\{\cdots\} \\ \vdots \\ \{\cdots\}\,\{\cdots\}\,\cdots\,\{\dots,n\} \end{array}\right.$$

Dejamos al lector meticuloso que se convenza de que, al recorrer todas las particiones de $\{1,\dots,n-1\}$ en k bloques vamos generando todas las particiones de $\{1,\dots,n\}$ en k bloques en las que n está acompañado, sin repetir ninguna. Como por cada partición del primer tipo obtenemos k del segundo, concluimos que hay $k\,S(n-1,k)$ particiones en este Caso 2.

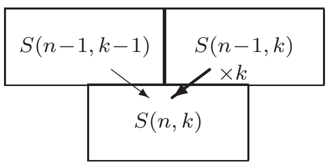
Ya tenemos la regla de recursión que buscábamos:

$$\boxed{S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\,S(n-1,k)}$$

que, junto a los valores frontera, codifica toda la información sobre los números $S(n,k)$. Podremos así construir el análogo al triángulo de Pascal, en el que podemos leer, además, sumando por filas, los valores de los números de Bell $B(n)$:

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$B(n)$
$n=1$	1							1
$n=2$	1	1						2
$n=3$	1	3	1					5
$n=4$	1	7	6	1				15
$n=5$	1	15	25	10	1			52
$n=6$	1	31	90	65	15	1		203
$n=7$	1	63	301	350	140	21	1	877

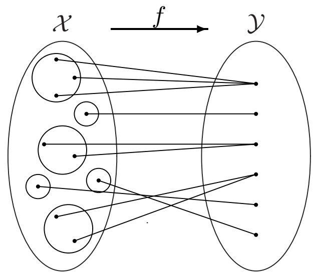
Observe el lector cómo ahora ya no tenemos la simetría del triángulo de los coeficientes binómicos. La regla de recursión se interpreta gráficamente como aparece a la derecha, donde la flecha de la izquierda, más oscura, nos indica que hay que multiplicar (por k) antes de sumar. Los números de Bell $B(n)$ también verifican una regla recursiva (véase el ejercicio 3.3.3).



B. Una fórmula para los números de Stirling de segunda especie. Relación con el número de aplicaciones sobreyectivas

Ya sabemos cuántas aplicaciones sobreyectivas hay entre un conjunto con n elementos y otro con k. Una fórmula complicada, que obtuvimos aplicando el principio de inclusión/exclusión en el ejemplo 3.1.4. Vamos ahora a relacionar, con un argumento combinatorio, ese número de aplicaciones sobreyectivas con $S(n,k)$. Esto nos dará, por un lado, una fórmula explícita para los $S(n,k)$. Alternativamente, dado que sabemos calcular eficazmente los números de Stirling, vía la regla de recurrencia, hallaremos una buena manera de calcular también el número de aplicaciones sobreyectivas entre dos conjuntos.

Sean dos conjuntos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ con tamaños respectivos n y k. Supongamos, como es habitual, que $\mathcal{X}=\{1,\dots,n\}$ e $\mathcal{Y}=\{1,\dots,k\}$. Obsérvese primero que una aplicación *cualquiera* de $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ define una partición del conjunto $\mathcal{X}$: en cada bloque de la partición estarán los elementos de $\mathcal{X}$ que tengan imagen común. Pero si además la aplicación es sobreyectiva (es decir, todo elemento $y\in\mathcal{Y}$ tiene un conjunto de preimágenes no vacío), entonces sabemos de cuántos bloques consta la partición: exactamente k, tantos como elementos tenga $\mathcal{Y}$.



Precisemos esta idea, construyendo las aplicaciones sobreyectivas de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ con el siguiente procedimiento: primero partimos el conjunto $\mathcal{X}$ en k bloques no vacíos. Esto, como bien sabemos, se puede hacer de $S(n,k)$ maneras distintas. Ahora que tenemos $\mathcal{X}$ partido en k bloques no vacíos, asignamos *a cada uno de estos bloques* un elemento de $\mathcal{Y}$. En términos de la aplicación, estaremos decidiendo cuál es el elemento imagen común a todos los del bloque. Este último paso se puede hacer, por supuesto, de $k!$ maneras. El dibujo de la izquierda describe el proceso, en el que primero construimos los bloques, y luego les asignamos imagen. Deducimos así que

$$\boxed{\#\{\text{aplicaciones sobreyectivas de } \mathcal{X}=\{1,\dots,n\} \text{ en } \mathcal{Y}=\{1,\dots,k\}\} = k!\,S(n,k)}\,.$$

Recuérdese que el valor de $S(n,k)$ se puede obtener mediante la regla de recursión citada antes. Y si ahora recuperamos el resultado del ejemplo 3.1.4, llegamos a la fórmula

$$\boxed{S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n} \quad \text{o bien} \quad S(n,k)=\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}m^n$$

(a la derecha hemos cambiado el índice de sumación, de j a $m=k-j$, y hemos utilizado la simetría de los coeficientes binómicos).

En términos de bolas en cajas, $S(n,k)$ cuenta el número de distribuciones de n bolas numeradas en k cajas *idénticas* (sin cajas vacías). Ahora vemos que $k!\,S(n,k)$ cuenta el número de distribuciones de n bolas numeradas en k cajas *numeradas* (sin cajas vacías).

En términos de particiones en subconjuntos, $S(n,k)$ cuenta el número de particiones de $\{1,\dots,n\}$ en k bloques no vacíos, cuando el orden de presentación de los bloques es irrelevante. Y $k!S(n,k)$ da respuesta, por supuesto, a la misma cuestión, cuando los bloques están ordenados. En su momento llamamos número de Bell $B(n)$ al número de particiones de de $\{1,\dots,n\}$ en bloques no vacíos. Puede el lector consultar el ejercicio 3.3.4 si es que está interesado en la versión “ordenada” de los números de Bell.

Calculemos, utilizando la fórmula anterior, $S(n,2)$:

$$S(n,2)=\frac{(-1)^2}{2!}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m\binom{2}{m}m^n=\frac{1}{2}\left[-\binom{2}{1}+\binom{2}{2}2^n\right]=\frac{2^n-2}{2},$$

como ya vimos en el ejemplo 3.3.2. Y si recordamos los cálculos que hicimos para $S(n,n)$ y $S(n,n-1)$, deducimos los valores de las siguientes dos imponentes sumas:

$$S(n,n)=\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}m^n=1\,;$$

$$S(n,n-1)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m\binom{n-1}{m}m^n=\binom{n}{2}.$$

Animamos al lector (no, es broma) a que intente la prueba algebraicas de estas identidades.

Ejemplo 3.3.3 *Una identidad para los números de Stirling de segunda especie.*

Sabemos que, si $|\mathcal{X}|=n$ y $|\mathcal{Y}|=k$, hay un total de k^n aplicaciones $\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ distintas. Una manera alternativa de contar este número de aplicaciones es la siguiente:

1. primero decidimos *cuántos* elementos de $\mathcal{Y}$ van a tener preimagen. Este número será un cierto j, con $1\le j\le k$. Ahora, para cada j,
2. decidimos *qué* elementos de $\mathcal{Y}$ tienen preimágenes (lo podremos hacer de $\binom{k}{j}$ maneras);
3. y una vez que hemos decidido a qué j elementos “llega” la aplicación, sólo resta construir una aplicación sobreyectiva a estos j elementos.

Aplicando las reglas de la suma y del producto, llegamos a que

$$k^n=\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}j!\,S(n,j)\,.$$

El sumatorio se extiende, en realidad, hasta el $\text{mín}(n,k)$; pero las convenciones habituales para los coeficientes binómicos y los números de Stirling simplifican la cuestión y nos permitirían poner n (o incluso $+\infty$) como límite superior de sumación. Hagámoslo así, y observemos que, para n fijo,

$$k^n=\sum_{j=1}^{n}k(k-1)\cdots(k-j+1)\,S(n,j)\qquad\text{para todo } k\ge 1.$$

Lo que esto nos dice es que los dos polinomios de grado n

$$x^n\qquad\text{y}\qquad\sum_{j=1}^{n}x(x-1)\cdots(x-j+1)\,S(n,j)$$

coinciden en todos los enteros positivos. Como veremos con más detalle en la sección 4.6, esto supone que en realidad ambos polinomios son el mismo. Volveremos sobre esto en breve (véase la página 175). ♣

3.3.2. Descomposición de permutaciones en ciclos

En la subsección 3.2.1 vimos que una permutación se puede escribir, de manera única, como producto de ciclos. Única, con las salvedades habituales: el orden en el que presentamos los ciclos, y el elemento que aparece primero dentro de cada ciclo.

En principio, el número de ciclos que puede tener una permutación es cualquier número entre 1 (las permutaciones cíclicas) y n (por ejemplo, la permutación identidad). Y la pregunta natural es: ¿cuántas permutaciones tienen un número determinado de ciclos? Llamemos

$$z(n,k) = \#\,\{\text{permutaciones de } \{1,\dots,n\} \text{ que tienen exactamente } k \text{ ciclos}\}\ .$$

A estos números se les suele llamar números de Stirling (sin signo) de primera especie. Por razones históricas (véase la discusión de la página 175), los **números de Stirling de primera especie** $s(n,k)$ se definen de forma ligeramente diferente: $s(n,k)$ cumple que

$$(-1)^{n-k}\, s(n,k) = z(n,k) = \#\,\{\text{permutaciones de } \{1,\dots,n\} \text{ con exactamente } k \text{ ciclos}\}\ ,$$

de manera que pueden tomar tanto valores positivos como negativos. En lo que sigue, y por simplificar, nos centraremos en la familia de números $s(n,k)$. Aunque todas las expresiones que obtendremos tendrán sencilla traducción a los números $z(n,k)$ sin más que eliminar los posibles signos: $z(n,k) = |s(n,k)|$.

Comenzamos el análisis fijando el rango de los parámetros n y k. En principio, tiene sentido considerar $n \geq 1$ y $k \geq 1$. Pero como no puede haber permutaciones con más ciclos que elementos, diremos que, dado $n \geq 1$,

$$s(n,k) = 0 \quad \text{si } k > n.$$

Así que podremos representar estos números de Stirling de primera especie en un triángulo a la Tartaglia. Obsérvese que, si $k = n$, la única permutación que tiene tantos ciclos como elementos es la identidad. Por tanto,

$$s(n,n) = (-1)^{n-n} \times 1 = 1 \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

El otro caso extremo sería considerar $k = 1$. Como ya vimos en la página 153, hay $(n-1)!$ permutaciones de $\{1,\dots,n\}$ que son, ellas mismas, un ciclo (las llamadas permutaciones cíclicas). Así que

$$s(n,1) = (-1)^{n-1}\,(n-1)! \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

A. Regla de recurrencia para los números de Stirling de primera especie

Ya tenemos los "valores frontera", y ahora buscaremos la regla de recurrencia. El argumento es similar al que empleábamos para los números $S(n,k)$: clasificaremos en función del papel de un elemento especial, digamos n. Partimos de una descomposición del conjunto $\mathcal{X} = \{1,\dots,n\}$ en k ciclos. Tenemos, de nuevo, dos casos excluyentes.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Si n forma un ciclo por sí mismo, entonces, al quitarlo, nos queda una permutación de $\{1,\dots,n-1\}$ con exactamente $k-1$ ciclos.

$\boxed{\text{Caso 2}}$ En caso contrario, n forma parte de un ciclo junto con otros elementos. Quitar n y pasar a permutaciones de $\{1, \dots, n-1\}$ no cambia el número de ciclos. Pero obsérvese lo que ocurre en el siguiente ejemplo, en el que quitamos el 4:

$$\circlearrowleft_4(3,\,2) \circ \circlearrowleft_4(1,\,4) \quad \xrightarrow{\text{da lugar a}} \quad \circlearrowleft_3(3\,2)\circlearrowleft_3(1)$$

$$\circlearrowleft_4(3,\,2,\,4) \circ \circlearrowleft_4(1) \quad \xrightarrow{\text{da lugar a}} \quad \circlearrowleft_3(3\,2)\circlearrowleft_3(1)$$

Esto no funciona. Argumentamos entonces en sentido contrario. Partimos de una permutación del conjunto $\{1, \dots, n-1\}$ con k ciclos, que tendrá un aspecto semejante a

$$\circlearrowleft_{n-1}(a_1^1, \dots, a_s^1) \circ \circlearrowleft_{n-1}(a_1^2, \dots, a_t^2) \circ \dots \circ \circlearrowleft_{n-1}(a_1^k, \dots, a_u^k)\,.$$

Queremos añadir el elemento n sin que se formen nuevos ciclos. Sea cual sea la permutación considerada, tenemos $n-1$ lugares donde colocarlo (los $n-1$ “huecos” entre los a_j). Así que, por cada permutación de $\{1, \dots, n-1\}$ con k ciclos, obtenemos $n-1$ permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ con k ciclos en las que n esté “acompañada”.

Deducimos entonces que el número de permutaciones de $\mathcal{X}$ con k ciclos coincide con

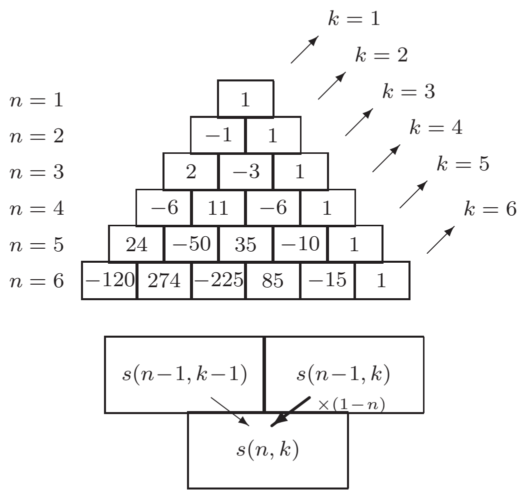
$$(n-1)\,\#\left\{\begin{matrix}\text{permutaciones de } \{1,\dots,n-1\} \\ \text{con } k \text{ ciclos}\end{matrix}\right\} + \#\left\{\begin{matrix}\text{permutaciones de } \{1,\dots,n-1\} \\ \text{con } k-1 \text{ ciclos}\end{matrix}\right\},$$

lo que nos daría la relación de recurrencia

$$z(n,k) = (n-1)\,z(n-1,k) + z(n-1,k-1)\,.$$

O, en términos de los $s(n,k)$,

$$\boxed{s(n,k) = -(n-1)\,s(n-1,k) + s(n-1,k-1)}$$



Con esta regla y los valores frontera, podemos rellenar los valores del triángulo de los $s(n,k)$. Los valores de $z(n,k)$ se leen, simplemente, quitando el signo en los valores del triángulo. Obsérvese que la suma por filas en el triángulo de los $s(n,k)$ da ahora siempre 0. ¿Y la suma por filas en el triángulo de los $z(n,k)$? Véase el ejercicio 3.3.6.

B. Relación entre los números de Stirling de primera y segunda especie

Antes de que el lector se aventure en la lectura de este apartado, queremos advertirle de que requiere cierta familiaridad con los conceptos de espacio vectorial y base.

Las familias de números $S(n,k)$ y $s(n,k)$ no tenían, cuando surgieron como conceptos matemáticos, el sabor combinatorio que aquí les estamos dando. Stirling estaba interesado en otras cuestiones, de tipo más algebraico, y que por su interés pasamos a esbozar, dejando para los ejercicios algunos detalles de su desarrollo.

Las dos siguientes son las identidades clave:

$$(*)\quad x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, x(x-1)\cdots(x-k+1)\,; \qquad (**)\quad x(x-1)\cdots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k.$$

La de la izquierda ya la vimos en el ejemplo 3.3.3. Por comodidad, tomamos el límite inferior de sumación como 0. Para ello, es conveniente definir $S(n,0) = 0$ para cada $n \geq 1$, pero $S(0,0) = 1$. Dejamos la prueba de la identidad $(**)$, que involucra números de Stirling de primera especie, como ejercicio 3.3.8 para el lector. Aquí también es necesario definir $s(n,0) = 0$ para cada $n \geq 1$, pero $s(0,0) = 1$.

El espacio de los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales es un espacio vectorial (de dimensión infinita, pero numerable). En él podemos considerar la *base estándar*, dada por

$$\mathcal{B}_1 = \big\{x^k\big\}_{k=0}^{\infty} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}\,,$$

que es la que se usa habitualmente en la definición de polinomio como una combinación lineal de potencias de x.

Pero en realidad cualquier colección de polinomios en la que cada uno tenga uno de los grados posibles valdría también como base (¡cerciórese el lector!). Por ejemplo, la *base de los factoriales decrecientes*,

$$\mathcal{B}_2 = \big\{x(x-1)\cdots(x-k+1)\big\}_{k=0}^{\infty} = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), \dots\}$$

(obsérvese la especial interpretación del caso $k = 0$).

Lo ilustramos con un ejemplo, que analizamos a mano: partimos del polinomio

$$p(x) = 1 + 2x + 3x^3,$$

cuyos coeficientes en la base $\mathcal{B}_1$ son, por supuesto, $(1, 2, 0, 3, 0, 0, \dots)$. Tras unas ciertas manipulaciones algebraicas, el lector podrá comprobar que

$$p(x) = 1 + 2x + 3x^3 = 1 + 5x + 9x(x-1) + 3x(x-1)(x-2)\,,$$

que nos dice que los coeficientes de $p(x)$ en la base $\mathcal{B}_2$ son $(1, 5, 9, 3, 0, 0, \dots)$.

Si el polinomio está escrito en la base $\mathcal{B}_2$, pasarlo a la base $\mathcal{B}_1$ es relativamente sencillo: basta multiplicar todos los factores e ir agrupando los términos de igual grado. El otro camino es algo más laborioso.

Observe el lector que las identidades $(*)$ y $(**)$ constituyen, precisamente, un diccionario para pasar de una base a la otra. La de la izquierda (en la que intervienen los $S(n,k)$) cambia de la base estándar $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$ de los factoriales decrecientes, mientras que la de la derecha (la de los $s(n,k)$) hace el cambio inverso. Aunque no sabemos bien qué tenía en mente Stirling cuando decidió bautizarlos como de primera y de segunda especie. El lector hallará más información y ocasión de aprender sobre este papel de los números de Stirling como coeficientes del cambio de base en los polinomios en el ejercicio 3.3.9.

3.3.3. Particiones de enteros

Nos interesa ahora contar de cuántas maneras se puede escribir un cierto entero $n \geq 1$ como *suma* de enteros positivos, donde el orden de los sumandos es *irrelevante*. Cada una de estas formas será lo que llamaremos una **partición** de n; y cada uno de los sumandos, una **parte**. A la derecha exhibimos las siete posibles particiones de 5. Obsérvese que, por ejemplo, $5 = 2 + 3$ y $5 = 3 + 2$ representan la misma partición. Por comodidad, se suelen escribir los sumandos de menor a mayor:

$$\begin{aligned} 5 &= 1+1+1+1+1 \\ 5 &= 1+1+1+2 \\ 5 &= 1+2+2 \\ 5 &= 1+1+3 \\ 5 &= 2+3 \\ 5 &= 1+4 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

$$11 = 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = \left[2^4\, 3\right] ;$$

o incluso en la forma abreviada de la derecha, donde 2^4 recuerda que hay que sumar 4 doses.

Al número total de particiones de n lo nombraremos como $\boldsymbol{p(n)}$. Intervendrán también en nuestros análisis las particiones de n que tienen *exactamente* $k \geq 1$ partes; el número de ellas será $\boldsymbol{p_k(n)}$. Obsérvese que $p_k(n) = 0$ si $k > n$, así que podremos disponer estos números en un "triángulo", como las familias combinatorias vistas hasta el momento. El valor de $p(n)$ se obtendrá, como es habitual, sumando los $p_k(n)$ de una fila de ese triángulo:

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n)$$

Por ejemplo, $p_1(5) = 1$, $p_2(5) = 2$, $p_3(5) = 2$, $p_4(5) = 1$ y $p_5(5) = 1$, que en total da $p(5) = 7$. En general, cuando queramos contar el número de particiones de n que cumplan una determinada propiedad, escribiremos

$$p(n \,|\, \text{la partición cumple cierta propiedad})$$

Así, por ejemplo, los $p_k(n)$ que acabamos de introducir corresponden a

$$p_k(n) = p(n \,|\, \text{el número de partes es exactamente } k)\,.$$

Contar el número de particiones de un entero n con ciertas características suele ser un asunto muy complicado. Como veremos en la sección 14.2, el lenguaje natural para tratar este tipo de cuestiones es el de las funciones generatrices. Pero, hasta entonces, nos conformaremos con utilizar argumentos de tipo combinatorio.

El lector atento habrá advertido la semejanza entre las particiones de un entero n y lo que en la subsección 3.1.3 llamábamos *composiciones* de n. La diferencia, vital como veremos, es que, al contrario que con las composiciones, para las particiones el orden de presentación de los sumandos no es relevante. Véanse a la derecha las cinco particiones del entero 4 y las correspondientes ocho composiciones. No muy alentador. No parece sencillo encontrar el diccionario entre estas dos cuestiones, pues el número de composiciones que corresponde a cada partición depende (y no queda claro cómo) de la partición en sí.

$$\begin{array}{rcl} \text{Particiones de 4} & & \text{Composiciones de 4} \\ 1+1+1+1 & \longleftrightarrow & 1+1+1+1 \\ 1+1+2 & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} 1+1+2 \\ 1+2+1 \\ 2+1+1 \end{array}\right\} \\ 2+2 & \longleftrightarrow & 2+2 \\ 1+3 & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} 1+3 \\ 3+1 \end{array}\right\} \\ 4 & \longleftrightarrow & 4 \end{array}$$

Para calcular los valores de $p_k(n)$ (y después los de $p(n)$), procederemos de la manera habitual: determinaremos una regla de recurrencia, que junto a unos "valores frontera" nos permitirán completar el triángulo correspondiente. Estos valores frontera son sencillos de calcular: por un lado, es claro que $p_1(n) = 1$ para cada $n \geq 1$, pues solo hay una manera de partir n en un sumando. De la misma forma, $p_n(n) = 1$, pues sólo hay una forma de escribir n como suma de n sumandos (todo unos). Vamos, entonces, con la regla de recurrencia.

B. Diagramas de Ferrers y recursión

Los llamados **diagramas de Ferrers**[32] son, como veremos, una manera muy útil y visual de representar, analizar y manipular las particiones de n. Se trata, simplemente, de dibujar tantas filas como sumandos tenga la partición y en cada fila colocar tantos símbolos (digamos $\times$) como nos diga el tamaño del sumando en cuestión (los dibujaremos en orden decreciente de tamaños). A la derecha mostramos los diagramas de Ferrers de sendas particiones. El primer resultado, que será la clave en los que vendrán después, es el siguiente:

$$9 = 1+3+5 \longrightarrow \begin{array}{l} \times\times\times\times\times \\ \times\times\times \\ \times \end{array}$$

$$9 = 1+2+3+3 \longrightarrow \begin{array}{l} \times\times\times \\ \times\times\times \\ \times\times \\ \times \end{array}$$

Teorema 3.4 *Dado $n \geq 1$ y un entero $1 \leq k \leq n$,*

$$p(n \,|\, \textit{con no más de } k \textit{ partes}) = p(n+k \,|\, \textit{con exactamente } k \textit{ partes}).$$

La cantidad de la derecha es lo que hemos dado en llamar $p_k(n+k)$.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a establecer una biyección entre los dos conjuntos de particiones.

$$k \text{ filas} \left\{ \begin{array}{l} \times\times\times\times\times \\ \times\times\times\times \\ \times\times\times\times \\ \times\times \\ \times \\ \times \end{array} \right.$$

Si tenemos una partición de $n+k$ con k partes, su diagrama de Ferrers tendrá k filas (y $n+k$ símbolos en total). Si borramos la primera columna, obtenemos el diagrama de Ferrers de una partición de n (hemos borrado k símbolos $\times$) que tiene, a lo sumo, k partes (el caso extremo sería aquél en el que no hubiera unos en la partición, de forma que al eliminar la primera columna no haríamos desaparecer fila alguna).

En el otro sentido, dada una partición de n con no más de k partes, al añadir una primera columna de k símbolos, obtenemos una partición de $n+k$ con exactamente k partes. ■

Esta sencilla observación nos permite establecer nuestra primera regla recursiva.

Teorema 3.5 (primera regla de recurrencia) *Dados $n \geq 1$ y $1 \leq k \leq n$,*

$$p_k(n) = \sum_{j=1}^{k} p_j(n-k)\,.$$

[32]En honor del matemático británico Norman Macleod Ferrers (1829-1903), quien parece ser que fue el primero en utilizarlos para el análisis de las particiones de un entero. Uno se puede imaginar a Ferrers trabajando en la cafetería de la esquina, pintando diagramas, para luego alardear de sus conocimientos matemáticos ante los colegas quienes, un momento después, se dan la vuelta y se ponen a dibujar crucecitas al tun-tún.

Demostración. Del teorema 3.4 sabemos que

$$p_k(n) = p(n \,|\, k \text{ partes}) = p(n-k \,|\, \text{con no más de } k \text{ partes})\,.$$

Y si clasificamos las particiones de $n-k$ con no más de k partes según el número de sumandos de que consten, terminamos la demostración:

$$p_k(n) = \sum_{j=1}^{k} p(n-k \,|\, \text{exactamente } j \text{ partes}) = \sum_{j=1}^{k} p_j(n-k)\,. \qquad \blacksquare$$

Pese a su aparatoso aspecto, la identidad anterior es una regla de recurrencia que permite calcular el valor de $p_k(n)$ si conocemos ciertos valores del número de particiones con parámetros más bajos (particiones de $n-k$ y número de sumandos hasta k). Sumando por filas obtenemos los correspondientes $p(n)$:

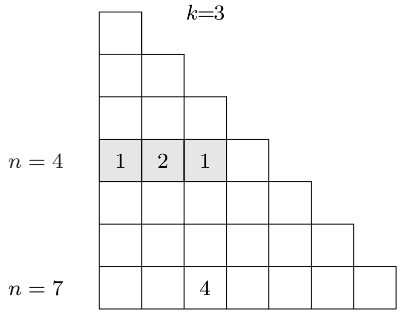
	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10	k=11	k=12	k=13	k=14	
$n=1$	1														$p(1)=1$
$n=2$	1	1													$p(2)=2$
$n=3$	1	1	1												$p(3)=3$
$n=4$	1	2	1	1											$p(4)=5$
$n=5$	1	2	2	1	1										$p(5)=7$
$n=6$	1	3	3	2	1	1									$p(6)=11$
$n=7$	1	3	4	3	2	1	1								$p(7)=15$
$n=8$	1	4	5	5	3	2	1	1							$p(8)=22$
$n=9$	1	4	7	6	5	3	2	1	1						$p(9)=30$
$n=10$	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1					$p(10)=42$
$n=11$	1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1				$p(11)=56$
$n=12$	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1			$p(12)=77$
$n=13$	1	6	14	18	18	14	11	7	5	3	2	1	1		$p(13)=101$
$n=14$	1	7	16	23	23	20	15	11	7	5	3	2	1	1	$p(14)=135$

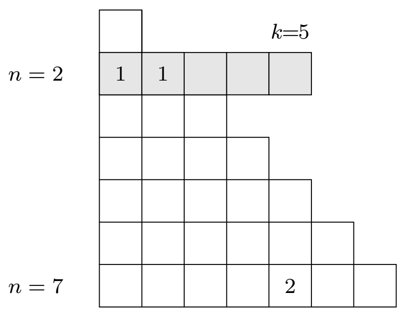
El tablero[33] anterior se ha ido generando disponiendo los unos en los bordes para luego aplicar sucesivamente la regla de recurrencia: para calcular $p_k(n)$ (fila n y columna k) sumaremos los valores de las casillas que estén en las primeras k columnas de la fila $n-k$. En realidad, la regla de recurrencia se debería escribir

$$p_k(n) = \sum_{j=1}^{\text{máx}(k,n-k)} p_j(n-k)\,,$$

[33] Vaya, y el gusto por los triángulos, ¿dónde quedó?

pues podría ocurrir que la fila de números que hay que sumar se "saliera" del triángulo. Los dos siguientes esquemas, que recogen los cálculos de $p_7(3)$ y $p_7(5)$, dan una idea de la situación:





Convendrá el lector, de todas formas, que no es una regla de recurrencia de uso cómodo. Hay una manera alternativa, y quizás más sencilla, de escribirla. El siguiente ejemplo nos indica el camino.

EJEMPLO 3.3.4 *Analicemos las $p_3(10) = 8$ particiones del entero 10 con tres partes.*

A la derecha mostramos las 8 particiones posibles. En las cuatro primeras, las que tienen unos, podemos quitar estos sumandos 1 a cada una de ellas para obtener particiones de 9 con únicamente dos partes (una menos que la de partida). Para las cuatro de la derecha, las que no tienen unos, podemos quitar, en cada una de ellas, un 1 a cada uno de los sumandos, para obtener particiones del entero $10 - 3 = 7$ que siguen teniendo tres partes. ♣

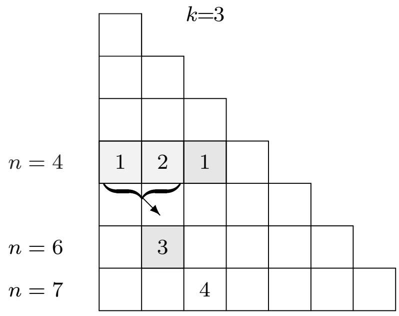
$1+1+8$	$2+2+6$
$1+2+7$	$2+3+5$
$1+3+6$	$2+4+4$
$1+4+5$	$3+3+4$

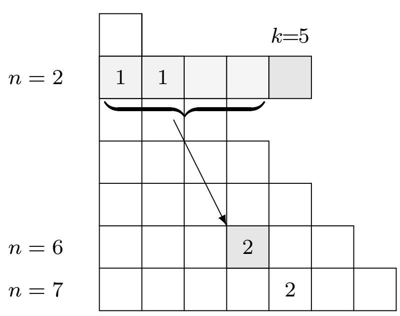
El argumento del ejemplo anterior prueba que $p_3(10) = p_2(9) + p_3(7)$. Un resultado que podemos generalizar:

Teorema 3.6 (segunda regla de recurrencia) *Dado $n \geq 1$ y un entero k entre 1 y n,*

$$\boxed{p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)}$$

DEMOSTRACIÓN. La comprobación gráfica es directa. Sólo hay que observar que, en la regla de recurrencia original, los primeros $k-1$ sumandos dan lugar a $p_{k-1}(n-1)$. Véanse los dos siguientes esquemas, que recogen las situaciones citadas anteriormente:





Nótese que, en esta regla de recurrencia de dos sumandos, alguno de ellos podría ser 0.

Más formalmente, usando en dos ocasiones la regla de recurrencia del teorema 3.5,

$$\begin{aligned} p_k(n) &= \sum_{j=1}^{k} p_j(n-k) = p_k(n-k) + \sum_{j=1}^{k-1} p_j(n-k) \\ &= p_k(n-k) + \sum_{j=1}^{k-1} p_j\big((n-1)-(k-1)\big) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-1)\,, \end{aligned}$$

Animamos al lector a que se entretenga probando el resultado directamente a partir de los diagramas de Ferrers, distinguiendo entre las particiones de n con k partes que contengan unos y las que no los contengan. ♣

Veamos una última aplicación de estos diagramas de Ferrers. Partimos de la simple observación de que si en el diagrama de una partición de n intercambiamos filas por columnas, obtenemos de nuevo una partición de n, porque no alteramos el número de símbolos (en ocasiones, por cierto, la partición que obtenemos con este procedimiento puede coincidir con la de partida, véase el ejercicio 3.3.10).

Hagámoslo, por ejemplo, para la partición de $n = 18$ codificada como $[1\,2\,3^2\,4\,5]$, que tiene seis partes y cuya parte mayor es un 5. Si ahora intercambiamos filas por columnas, obtenemos una partición de 18 con cinco partes y cuya parte mayor es 6. En concreto, la partición $[1\,2\,4\,5\,6]$. En la figura representamos los diagramas de Ferrers de ambas particiones.

$$\begin{array}{lllll} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & & \\ \times & \times & & & \\ \times & & & & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{llllll} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times & & \\ \times & \times & & & & \\ \times & & & & & \end{array}$$

Si en una partición λ intercambiamos filas por columnas, obtenemos su partición **conjugada** λ'. Las particiones λ y λ' tienen intercambiados los papeles del número de partes y el tamaño de la parte mayor (como ocurría en el ejemplo de la partición de 18). De hecho, la transformación $\lambda \longrightarrow \lambda'$ es una biyección entre las particiones de n que tienen k partes y las particiones de n cuyo mayor sumando es k, como se recoge en el siguiente resultado:

Teorema 3.7 *Dados unos enteros positivos n y k,*

$$p(n \mid \textit{su mayor parte es } k) = p(n \mid k \textit{ partes}) = p_k(n)\,.$$

Y, por tanto,

$$p(n \mid \textit{su mayor parte es} \leq k) = p(n \mid \textit{no más de } k \textit{ partes}) \overset{\textit{teorema } 3.4}{=} p_k(n+k).$$

B. Estimaciones de tamaño

Ya tenemos un procedimiento eficaz para calcular los valores de $p_k(n)$, y por ende, los de $p(n)$. Ahora nos preguntamos por el tamaño de uno cualquiera de estos números, en especial cuando n es muy grande. La estimación asintótica del número de particiones $p(n)$ es un problema extremadamente sutil, sobre el que volveremos en la sección 14.2, ya con el lenguaje de las funciones generatrices. Aquí nos limitaremos a estimar el tamaño de $p_k(n)$, cuando $n \to \infty$ y k está fijo.

Vamos a comparar particiones con composiciones. Para ello, puede ser útil que el lector eche un vistazo al cuadro de particiones y composiciones de $n = 4$ que exhibíamos la comienzo de la sección. Fijamos n y k. Sabemos (recuérdese la subsección 3.1.3) que hay $\binom{n-1}{k-1}$ composiciones de n con k sumandos. Las dos siguientes observaciones son inmediatas:

- por un lado, hay menos particiones de n con k partes que composiciones de n con k partes, por aquello del orden. Así que $p_k(n) \leq \binom{n-1}{k-1}$.
- Pero, por otro lado, dada una partición de n en k partes, podemos permutar de $k!$ maneras sus sumandos para obtener composiciones. No todas serán iguales, claro, pero con este procedimiento (permutar particiones) obtenemos todas las posibles composiciones (muchas repetidas). Por ejemplo, la partición $5 = 1 + 2 + 2$, que tiene tres sumandos, daría lugar, en principio, a $3! = 6$ posibles ordenaciones de los sumandos de las que, en realidad, sólo hay tres composiciones distintas, $1 + 2 + 2$, $2 + 1 + 2$ y $2 + 2 + 1$. Esto nos dice que $k!\, p_k(n) \geq \binom{n-1}{k-1}$.

Reuniendo ambas,

$$\frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1} \leq p_k(n) \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

Bueno, no está mal, pero queremos afinar un poco más, al menos la desigualdad de la derecha, para "ganar" un factor $k!$ en el denominador, de manera que, cuando n sea grande, ambas cotas sean asintóticamente semejantes.

Nótese que, por ejemplo, a la partición $2 + 3$ le corresponden tantas composiciones (dos) como permutaciones de los sumandos, *porque todos los sumandos son distintos*. Eso no ocurre si, como decíamos antes, la partición fuera $1 + 2 + 2$. Precisemos esta idea. Obsérvese que cada partición de n con exactamente k partes se corresponde con una solución de

$$(\star) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \end{cases}$$

Escribimos ordenados (por ejemplo de menor a mayor) los k términos para evitar, justamente, escribir la misma partición varias veces. Quizás el lector recuerde ahora, algo esperanzado con la posibilidad de ahorrarse nuevos cálculos, las técnicas y resultados del análisis de ecuaciones diofánticas que hicimos en la subsección 3.1.3. Sentimos decepcionarle: el tipo de restricciones sobre las variables que allí teníamos ($x_j \geq a_j$, donde los números a_j son *fijos*) no son como las que afrontamos ahora, y el análisis de la cuestión no será tan simple como entonces. Aún así, sigamos adelante. Si ahora hacemos el cambio de variables

$$\widetilde{x}_i = x_i + (i-1)\,, \qquad \text{para cada } 1 \leq i \leq k\,,$$

los números $\tilde{x}_i$ mantienen el mismo orden que tenían los x_i, pero son ahora todos distintos (los hemos "separado"). La suma de estos nuevos números vale

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^{k}(x_i + i - 1) = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{k}(i-1) = n + \sum_{j=0}^{k-1} j = n + \frac{k(k-1)}{2}\,.$$

Así que $p_k(n)$, el número de soluciones del problema $(\star)$, es también el número de soluciones de

$$(\star\star) \qquad \begin{cases} \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + \cdots + \widetilde{x}_k = n + k(k-1)/2 \\ 1 \le \widetilde{x}_1 < \widetilde{x}_2 < \cdots < \widetilde{x}_k \end{cases}$$

Por ejemplo, del entero 6 hay tantas particiones con tres sumandos como soluciones tenga

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 1 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \end{cases}$$

Debajo de estas líneas, a la izquierda, mostramos tres de estas particiones. A su derecha escribimos su traducción en términos de las $\widetilde{x}_i$ (al valor de x_3 hay que sumarle 2, al de x_2 le sumamos 1 y dejamos x_1 tal como está):

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & & x_2 & & x_3 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 6 = & 1 & + & 1 & + & 4 \\ 6 = & 1 & + & 2 & + & 3 \\ 6 = & 2 & + & 2 & + & 2 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{cccccc} & \widetilde{x}_1 & & \widetilde{x}_2 & & \widetilde{x}_3 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 9 = & 1 & + & 2 & + & 6 \\ 9 = & 1 & + & 3 & + & 5 \\ 9 = & 2 & + & 3 & + & 4 \end{array}$$

Pero ahora, como los $\widetilde{x}_i$ son todos *distintos*, cada permutación de una lista solución $(\widetilde{x}_i, \dots, \widetilde{x}_k)$ genera una composición distinta de $n + k(k-1)/2$ con tamaño k. En el ejemplo, la partición de 9 dada por $1+2+6$ da lugar a las $3! = 6$ composiciones de 9 siguientes:

$$1+2+6\,, \quad 1+6+2\,, \quad 2+1+6\,, \quad 2+6+1\,, \quad 6+1+2\,, \quad 6+2+1\,.$$

Pero por supuesto no están todas (por ejemplo, la composición de 9 dada por $3+3+3$ no la podemos obtener de esta manera), así que

$$k!\, p_k(n) \le \binom{n + \frac{k(k-1)}{2} - 1}{k-1} \implies p_k(n) \le \frac{1}{k!}\binom{n + \frac{k(k-1)}{2} - 1}{k-1}.$$

Dejamos que el lector compruebe, para lo que quizás le será útil revisar el ejercicio 3.1.3, que esta estimación mejora la inicial, $p_k(n) \le \binom{n-1}{k-1}$, esencialmente en un factor $1/k!$ extra. Ahora reunimos toda la información y concluimos que

$$\frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1} \le p_k(n) \le \frac{1}{k!}\binom{n + \frac{k(k-1)}{2} - 1}{k-1}.$$

Estas acotaciones, válidas para todo n y para cada $k = 1, \dots, n$, son suficientes para obtener que, para k fijo,

$$\boxed{p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!\,(k-1)!} \qquad \text{cuando } n \to \infty}$$

Consulte el lector concienzudo el ejercicio 3.1.3 para los detalles. Observe, por cierto, que la expresión anterior describe el comportamiento asintótico de $p_k(n)$ para k fijo, es decir, para una columna fija de la tabla de la página 179. No está claro cómo trasladarla a una estimación asintótica para $p(n)$ (que tiene que ver con sumar en filas).

C. Particiones con todos los sumandos distintos

Hasta ahora hemos obtenido bastante información sobre los números $p_k(n)$: una regla de recurrencia y unas estimaciones asintóticas. El cálculo de $p(n)$ es indirecto, sumando en k todos los $p_k(n)$. Sería interesante disponer de una regla de recurrencia que nos permita calcular directamente los $p(n)$, o al menos estimar asintóticamente su tamaño. Tanto la regla de recurrencia como las estimaciones asintóticas las obtendremos en las subsecciones 14.2.3 y 14.3.3, respectivamente, aunque ya usando el lenguajes de las funciones generatrices. Pero para la regla de recurrencia que obtendremos allí será útil el teorema 3.8 que veremos a continuación, que relaciona dos tipos especiales de particiones.

Vamos a profundizar en el estudio de las particiones de n con sumandos distintos, que ya aparecieron en un par de ocasiones en la discusión del apartado anterior, al relacionar particiones y composiciones. Para aligerar notación, vamos a llamar

$$q_k(n) = p(n \,|\, \text{con } k \text{ partes, todas distintas}), \qquad q(n) = p(n \,|\, \text{con partes distintas}).$$

Y también

$$\begin{aligned} q_{\text{par}}(n) &= p(n \,|\, \text{con un número par de partes, todas distintas}); \\ q_{\text{impar}}(n) &= p(n \,|\, \text{con un número impar de partes, todas distintas}). \end{aligned}$$

Es claro que

$$q(n) = \sum_{k=1}^{n} q_k(n) = \sum_{k \text{ par}} q_k(n) + \sum_{k \text{ impar}} q_k(n) = q_{\text{par}}(n) + q_{\text{impar}}(n).$$

La siguiente tabla recoge estas cantidades para los primeros valores de n:

n	particiones con sumandos distintos	$q(n)$	$q_1(n)$	$q_2(n)$	$q_3(n)$	$\cdots$	$q_{\text{par}}(n)$	$q_{\text{impar}}(n)$
1	1	1	1	0	0	$\cdots$	0	1
2	2	1	1	0	0	$\cdots$	0	1
3	3 , 1+ 2	2	1	1	0	$\cdots$	1	1
4	4 , 1+ 3	2	1	1	0	$\cdots$	1	1
5	5 , 1+ 4 , 2+ 3	3	1	2	0	$\cdots$	2	1
6	6 , 1+ 5 , 2+ 4 , 1+ 2+ 3	4	1	2	1	$\cdots$	2	2
7	7 , 1+ 6 , 2+ 5 , 3+ 4 , 1+ 2+ 4	5	1	3	1	$\cdots$	3	2
8	8 , 1+ 7 , 2+ 6 , 3+ 5 , 1+ 2+ 5 , 1+ 3+ 4	6	1	3	2	$\cdots$	3	3

Si el lector revisa con cuidado el argumento de "separación" de particiones del apartado anterior, obtendrá sin mucha dificultad que

$$q_k(n) = p_k\big(n - \tbinom{k}{2}\big),$$

así que se puede obtener la "tabla" de valores de los $q_k(n)$ conociendo los valores de las particiones habituales.

Pero no es eso lo que nos interesa aquí, sino el curioso comportamiento de las cantidades $q_{\text{par}}(n)$ y $q_{\text{impar}}(n)$. Véanse las dos últimas columnas de la tabla: estas cantidades, o bien coinciden, o bien difieren en una unidad. Por ejemplo, $q_{\text{par}}(n)$ está una unidad por debajo para 1 y 2 (y 12, 15, etc., si el lector tuviera la paciencia de analizar estos casos), mientras que está una unidad por encima para 5 y 7 (y también 22 y 26, etc.). ¿Es esto un patrón general? ¿Para que valores de n coinciden, y para cuáles una lleva ventaja sobre la otra?

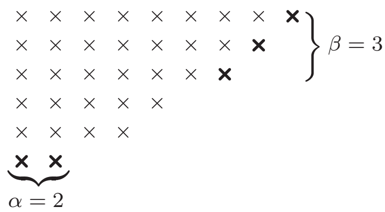
Teorema 3.8

$$q_{\text{par}}(n) - q_{\text{impar}}(n) = \begin{cases} (-1)^m, & \textit{si } n = \frac{m}{2}(3m \pm 1) \quad \textit{para cierto entero } m, \\ 0, & \textit{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

Antes de proceder a la demostración del teorema, y para insistir en el asombro que produce su enunciado, señalemos que los números $\frac{m}{2}(3m \pm 1)$, cuyos primeros valores son

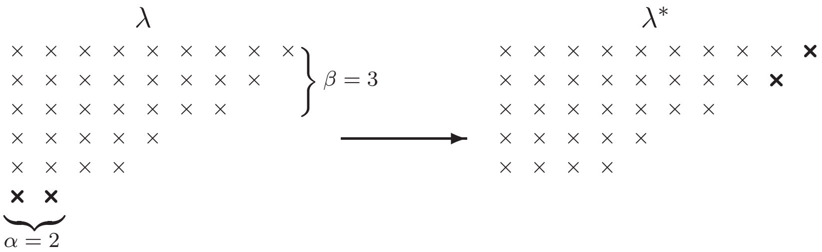
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$\cdots$
$m\,(3m-1)/2$	1	5	12	22	35	51	70	$\cdots$
$m\,(3m+1)/2$	2	7	15	26	40	57	77	$\cdots$

son los llamados **números pentagonales** (al menos los de la primera fila), de los que ya hablamos en el ejercicio 1.2.3.

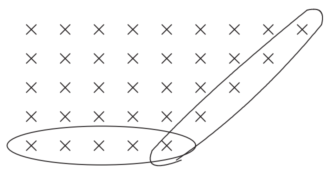


Demostración. A cada partición λ de n con todas sus partes distintas le vamos a asociar dos cantidades: por un lado, $\alpha(\lambda)$, que será el tamaño del menor sumando de la partición. Por otro, empezando por el mayor sumando, determinamos cuántas partes consecutivas se diferencian de la anterior en exactamente 1; a ese número lo llamaremos $\beta(\lambda)$. Obsérvese, en el ejemplo de la derecha, que $\beta = 3$ porque las tres partes mayores difieren en una unidad, pero ya no la cuarta. Vamos ahora a definir unas reglas que cambian la paridad del número de sumandos que tiene una partición de n con partes distintas. Distinguimos dos casos, en función de $\alpha(\lambda)$ y $\beta(\lambda)$.

***Caso 1:* $\boldsymbol{\alpha(\lambda) \le \beta(\lambda)}$.** A partir de λ construimos una partición λ^* quitando el menor sumando de λ y añadiendo sus α símbolos a las α partes mayores de la partición:



La partición λ^* sigue teniendo partes distintas; pero tiene un sumando menos que los que tuviera λ (cambia la paridad del número de partes).



Pero hay un caso en el que esta regla no se puede aplicar. Lo ilustramos con un ejemplo. Supongamos que tenemos una partición del entero 35 (que, como el lector ya habrá advertido, es un número pentagonal) con todas sus partes distintas y $\alpha = \beta$, digamos iguales a 5, como en el esquema de la derecha. Como $\alpha = \beta = 5$, deberíamos aplicar la primera regla. Pero no, la regla no está definida en este caso, pues no podemos quitar las 5 aspas del último sumando y añadírselos a los restantes sumandos (¡nos faltaría uno!). Esta situación se presentará siempre que tengamos $\alpha = \beta = m$ y haya un solapamiento como el que indica el dibujo anterior. Pero ese solapamiento se produce porque hay exactamente m partes, que son m, $m+1$, $\ldots$, $2m-1$. Así que n deberá ser de la forma

$$n = \sum_{j=0}^{m-1} (m+j) = m^2 + \sum_{j=1}^{m-1} j = m^2 + \frac{(m-1)\,m}{2} = \frac{m}{2}\,(3m-1)\,,$$

justamente un número pentagonal (35 es el número pentagonal correspondiente a $m=5$).

***Caso 2:* $\boldsymbol{\alpha(\lambda) > \beta(\lambda)}$.** En este caso, quitamos ahora los β últimos símbolos de las β mayores partes y los colocamos como un nuevo sumando (que será el más pequeño):

$$\begin{array}{c} \lambda \\ \left.\begin{array}{l} \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \boldsymbol{\times} \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \boldsymbol{\times} \end{array}\right\}\beta=2 \\ \begin{array}{l} \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\ \underbrace{\times\ \times\ \times}_{\alpha=3} \end{array} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \qquad\lambda^* \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\ \times\ \times\ \times \\ \boldsymbol{\times}\ \boldsymbol{\times} \end{array}$$

Obsérvese que λ^*, que tienen todas sus partes distintas, tiene un sumando más que λ.

Pero, de nuevo, hay una excepción. Consideremos ahora el entero 26 y una partición suya con todas los sumandos distintos y $\alpha > \beta$, como la que mostramos bajo estas líneas. Toca aplicar la Regla 2, y con ella obtenemos la partición que aparece a la derecha.

$$\begin{array}{l} \qquad\lambda \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \boldsymbol{\times} \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \boldsymbol{\times} \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \boldsymbol{\times} \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \boldsymbol{\times} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \qquad\lambda^* \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\ \times\ \times\ \times\ \times\ \times \\ \times\ \times\ \times\ \times \\ \boldsymbol{\times}\ \boldsymbol{\times}\ \boldsymbol{\times}\ \boldsymbol{\times} \end{array}$$

Pero, ¡cuidado!, la partición resultante no tendría todos los sumandos distintos. En general, nos encontraremos en esta situación siempre que $\alpha = \#\text{ partes} + 1$ y que esas partes sean $m+1, \ldots, 2m$. Es decir, cuando n sea de la forma

$$n = \sum_{j=1}^{m} (m+j) = m^2 + \sum_{j=1}^{m} j = m^2 + \frac{n\,(m+1)}{2} = \frac{m}{2}(3m+1)\,,$$

que es la otra familia de números pentagonales.

Queda como ejercicio 3.3.11 para el lector la comprobación de que si n es de la forma $m(3m \pm 1)/2$, entonces $p_{\text{par}}(n)$ y $p_{\text{impar}}(n)$ difieren en $(-1)^m$. En el resto de los casos, como ya hemos comprobado, la transformación $\lambda \to \lambda^*$ es una biyección entre el conjunto de las particiones de n con un número par de sumandos distintos y el de las particiones de n con un número impar de sumandos distintos. ■

Dejamos aquí el estudio de las particiones, emplazando a lector interesado a que se reencuentre con ella en el capítulo 14, en el que, provistos del poderoso lenguaje de las funciones generatrices, obtendremos algunos otros resultados que con estos sencillos análisis combinatorios no seríamos capaces de conseguir.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.3

3.3.1 *Compruébese que*

$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}.$$

Hállese una fórmula análoga para $S(n, n-3)$*. Obténgase también una fórmula para* $S(n, 3)$*.*

3.3.2 *Pruébese que* $S(n+1, m+1) = \displaystyle\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} S(k, m)$*.*

3.3.3 *El número de Bell* $B(n)$ *cuenta el número de particiones de* $\{1, \dots, n\}$ *en bloques no vacíos:*

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$$

(véase una interpretación alternativa en la subsección 3.5.1*). Compruébese que, si definimos* $B(0) = 1$*, se verifica la siguiente relación de recurrencia:*

$$B(n) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} B(n-j)\,, \quad \textit{esto es,} \quad B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(k) \qquad \textit{para cada } n \geq 1$$

3.3.4 *Consideremos ahora el número de particiones del conjunto* $\{1, \dots, n\}$ *en bloques no vacíos, de manera que los bloques van numerados (el orden dentro de los bloques sigue siendo irrelevante). A este número lo llamaremos n-ésimo* ***número de Bell ordenado****,* $\widetilde{B}(n)$*. Compruébese que*

$$\widetilde{B}(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)\, k!\,.$$

Pruébese que, si definimos $\widetilde{B}(0) = 1$*, estos números verifican la siguiente relación de recurrencia:*

$$\widetilde{B}(n) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \widetilde{B}(n-j) \textit{ para cada } n \geq 1, \quad \textit{o, lo que es lo mismo,} \quad \widetilde{B}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \widetilde{B}(k)\,.$$

3.3.5 *Un grupo de* 100 *personas hacen un examen tipo test que consta de 150 preguntas. A la vista de los resultados obtenidos por cada uno de ellos (entre 0 y 150 puntos), hacemos un ranking de los candidatos: una primera categoría para los de máxima puntuación, una segunda para los que tengan la siguiente puntuación, etc. Nótese que puede haber varios candidatos en la misma categoría. ¿Cuántas posibles clasificaciones finales de éstas podrá haber?*

3.3.6 *Pruébese que*

$$(a) \quad \sum_{k\geq 1} z(n, k) = \sum_{k \geq 1} |s(n, k)| = n! \quad \textit{para cada } n \geq 1; \qquad (b) \quad \sum_{k \geq 1} s(n, k) = 0 \quad \textit{para cada } n \geq 2.$$

3.3.7 *Pruébese que*

$$(a) \quad z(n+1, k) = \sum_{j=0}^{n-k+1} \binom{n}{j} j!\, z(n-j, k-1)\,; \quad (b) \quad s(n+1, k) = \sum_{j=0}^{n-k+1} \binom{n}{j} (-1)^j\, j!\, s(n-j, k-1)\,.$$

3.3.8 *Pruébese, por inducción y utilizando la regla de recurrencia para los $s(n,k)$, que*

$$x(x-1)\cdots(x-n+1)=\sum_{k\geq 0} s(n,k)\,x^k.$$

3.3.9 *En este ejercicio discutimos la relación entre los números de Stirling de primera y segunda especie. Consideremos la base usual de los polinomios $\mathcal{B}_1=\{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5,\dots\}$ y la base de los factoriales decrecientes*

$$\mathcal{B}_2=\{1,x,x(x-1),x(x-1)(x-2),x(x-1)(x-2)(x-3),x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4),\dots\}.$$

(a) Compruébese que los primeros elementos de $\mathcal{B}_1$ es escriben, en términos de los de $\mathcal{B}_2$, como sigue:

$$\begin{aligned} 1 &= 1\\ x &= x\\ x^2 &= x+x(x-1)\\ x^3 &= x+3x(x-1)+x(x-1)(x-2)\\ x^4 &= x+7x(x-1)+6x(x-1)(x-2)+x(x-1)(x-2)(x-3)\end{aligned}$$

Nótese la presencia de los $S(n,k)$ en los términos de la derecha. Verifíquese, en sentido contrario, que

$$\begin{aligned} 1 &= 1\\ x &= x\\ x(x-1) &= -x+x^2\\ x(x-1)(x-2) &= 2x-3x^2+x^3\\ x(x-1)(x-2)(x-3) &= -6x+11x^2-6x^3+x^4\end{aligned}$$

Obsérvese que los coeficientes que aparecen son ahora los números $s(n,k)$.

(b) El paso de una base a otra se puede codificar matricialmente. Sea $\mathbf{S}$ la matriz (infinita) cuyas filas y columnas se indexan de 0 en adelante, y que en la fila n $(n\geq 0)$ y en la columna k $(k\geq 0)$ tiene como registro el número de Stirling de segunda especie $S(n,k)$. Sea $\mathbf{s}$ la matriz análoga para los números de Stirling de primera especie, $s(n,k)$. Recuérdese que hemos definido $s(0,0)=1=S(0,0)$.

Supongamos que el polinomio $p(x)$ tiene coeficientes (α_k) en la base usual y coeficientes (β_k) en la base de los factoriales decrecientes. Esto es,

$$p(x)=\sum_k \alpha_k x^k=\sum_k \beta_k x(x-1)\cdots(x-k+1)$$

Compruébese que, si denotamos por $\times$ el producto de matrices habitual,

$$(\alpha_0,\alpha_1,\dots)\times\mathbf{S}=(\beta_0,\beta_1,\dots)\qquad \text{y que}\qquad (\beta_0,\beta_1,\dots)\times\mathbf{s}=(\alpha_0,\alpha_1,\dots)\,,$$

(c) Compruébese que $\mathbf{S}\times\mathbf{s}=\mathbf{s}\times\mathbf{S}=I$, donde I es la matriz identidad (infinita).

(d) Sean f y g son dos funciones definidas en $\mathbb{N}$. Compruébese que

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n} s(n,k)\,g(k)\quad\Longleftrightarrow\quad g(n)=\sum_{k=1}^{n} S(n,k)\,f(k)\,.$$

3.3.10 *Si una partición λ coincide con su conjugada, se dice, por supuesto, que es **autoconjugada**.*

(a) Compruébese que, para los valores de $n = 1, \ldots, 16$, *hay el siguiente número de particiones autoconjugadas:* $1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5$.

(b) Pruébese que $p(n|\text{autoconjugadas}) = p(n|\text{con partes distintas e impares})$.

3.3.11 *Complétese la demostración del teorema* 3.8 *probando que si* $n = m(3m \pm 1)/2$, *entonces*

$$p_{\text{par}}(n) - p_{\text{impar}}(n) = (-1)^m.$$

3.3.12 *Comprueba que*

$$p_2(n) = \lfloor n/2 \rfloor.$$

¿Podrías dar una fórmula para $p_3(n)$*?*

3.3.13 *Comprueba que, para* k *fijo,* $p_k(n)$ *es una función creciente de* n.

3.3.14 *Prueba, con un argumento combinatorio directo, que*

$$p_{n-2}(n) = 2 \quad \text{si } n \geq 4 \qquad \text{y que} \qquad p_{n-3}(n) = 3 \quad \text{si } n \geq 6.$$

3.3.15 *Prueba que, para* j *fijo, la función* $p_{n-j}(n)$ *es creciente para todo* n *y que es constante a partir de un cierto valor de* n.