

## Variable Compleja I, CURSO 2015-16

(3º de Grado en Matemáticas y 4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

### HOJA 3 DE PROBLEMAS

#### Integración compleja: propiedades y estimaciones básicas

1) Calcule  $\int_{\gamma} |z| \bar{z} dz$ , donde  $\gamma$  es el camino cerrado compuesto por la semicircunferencia superior de  $|z| = 1$  y el segmento  $-1 \leq x \leq 1$ ;  $y = 0$ , con orientación positiva.

2) ¿Es cierto que  $\operatorname{Re}\{\int_{\gamma} f(z) dz\} = \int_{\gamma} \operatorname{Re}\{f(z)\} dz$  para cualquier  $f$ , función continua con valores complejos? Razone la respuesta.

3) Calcule  $\int_{\gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz$ , donde  $\gamma$  es el camino que va de  $-3$  a  $-1$  a lo largo del eje real, después va de  $-1$  a  $1$  siguiendo la semicircunferencia superior del círculo unidad, luego va de  $1$  a  $3$  de nuevo a lo largo del eje real, y regresa a  $-3$  por la semicircunferencia superior del círculo  $|z| = 3$ .

4) Demuestre que si  $|a| < R$ , entonces

$$\int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} \leq \frac{2\pi R}{R^2 - |a|^2}.$$

5) Sea  $\gamma$  el cuadrado en  $\mathbb{C}$  con vértices  $\pm 1 \pm i$ . Acote el valor absoluto de las siguientes integrales:

$$(i) \int_{|z|=1} \frac{dz}{2-z^3}, \quad (ii) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2} dz \quad (iii) \int_{\gamma} (\cos z)^2 dz$$

6) Sea  $\gamma$  el arco del círculo  $|z| = 2$  comprendido en el primer cuadrante. Verifique la estimación

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

#### Teorema de Green en forma compleja

7) Sea  $P(z)$  un polinomio y sea  $\gamma$  el círculo  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$  orientado positivamente. Pruebe que

$$\int_{\gamma} \overline{P(z)} dz = 2\pi i R^2 \overline{P'(0)}.$$

8) Sea  $\gamma$  un camino simple y cerrado que encierra un área  $S$ . Demuestre que

$$S = \frac{1}{i} \int_{\gamma} x dz = - \int_{\gamma} y dz = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \bar{z} dz.$$

9) Sea  $\gamma$  un camino cerrado simple en  $\mathbb{D}$ , y  $f$  una función holomorfa en  $\mathbb{D}$  e inyectiva. Demuestre que  $\int_{\gamma} f(z) f'(z) dz$  es un número imaginario puro.

**Ayuda:** Escriba  $f = u + iv$  y use un cálculo directo (largo) con la fórmula de Green, o bien aplique un cambio de variables adecuado y relacione la integral con un área.

## Teorema y fórmula integral de Cauchy y algunas de sus aplicaciones

10) Calcule las siguientes integrales, justificando las respuestas:

$$\text{a) } \int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2+3i}, \quad \text{b) } \int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2+16}, \quad \text{c) } \int_{|z|=1} \frac{z^2 \operatorname{sen} z \, dz}{(z+a)^3}, \quad |a| \neq 1.$$

11) Sea  $\gamma$  la circunferencia unidad orientada positivamente. Calcule las siguientes integrales:

$$\text{(i) } \int_{\gamma} z \operatorname{sen} z^2 \, dz, \quad \text{(ii) } \int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \, dz, \quad \text{(iii) } \int_{\gamma} \frac{1-\cos z}{z^2} \, dz, \quad \text{(iv) } \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2} \, dz, \quad \text{(v) } \int_{\gamma} \frac{2}{1-4z^2} \, dz.$$

12) Calcule las siguientes integrales trigonométricas usando la integración sobre la circunferencia unidad y la fórmula integral de Cauchy:

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t} \, dt, \quad \text{b) } \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5-4\operatorname{sen} t} \, dt, \quad \text{c) } \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\operatorname{sen} t) \, dt.$$

13)\* Calcule la integral  $\int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2n} \, d\theta$ . ¿Cuál es el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2n} \, d\theta$ ?

**Sugerencia:** Calcule la integral de línea  $\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$  usando el desarrollo binomial.

14) Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{C}$  con la frontera  $\partial\Omega$  y  $f$  una función holomorfa en  $\Omega$  tal que, para un cierto  $M > 0$ , se tiene  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in \Omega$ . Pruebe que

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{\text{distancia}(z, \partial\Omega)}$$

**Sugerencia:** Sea  $r < \text{distancia}(z, \partial\Omega)$ . Use la fórmula integral de Cauchy en  $D(z; r)$ .

15) Demuestre que si  $f$  es holomorfa en un abierto que contiene al disco unidad cerrado  $\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| \leq 1\}$  y si  $f(z) = 0$  cuando  $|z| = 1$ , entonces  $f(z) = 0$  para todo  $z \in \overline{\mathbb{D}}$ .

**Ayuda:** Fórmula integral de Cauchy.

16) Demuestre que si  $a, b \in \mathbb{C}$  y  $R > 0$  es tal que  $|a| < R$ ,  $|b| < R$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} \, dz = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Luego use esta fórmula para probar el Teorema de Liouville: *toda función entera y acotada es constante.* (**Ayuda:** Use fracciones simples y después haga que  $R \rightarrow +\infty$ .)

17)\* Calcule la integral  $\int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2n} \, d\theta$ . ¿Cuál es el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2n} \, d\theta$ ?

**Sugerencia:** Calcule la integral de línea  $\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$  usando el desarrollo binomial.

18)\* Sea  $f$  una función holomorfa en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R_0\}$ . Demuestre las siguientes fórmulas:

a) Si  $\gamma$  es la circunferencia  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$  con  $R < R_0$  y  $|w| < R$ , entonces

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{R^2 - |w|^2}{(z-w)(R^2 - z\bar{w})} f(z) \, dz$$

b) Si  $0 \leq r < R < R_0$ , entonces

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \psi) + r^2} f(Re^{i\psi}) \, d\psi$$