Variable Compleja I CURSO 2015-16

(3º de Matemáticas y 4º de Doble Grado)

HOJA 1 DE PROBLEMAS

1) Realice las operaciones indicadas:

a) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{1+i}$, **b)** $(i-\sqrt{2})^2$, **c)** $\dfrac{1}{(3+2i)^2}$, **d)** $(1+i\sqrt{3})^3$, **e)** $\overline{(1-i)}^2+\overline{2+i}$, **f)** $|(2-i)(1+i)^4|$.

2) Calcule los valores de

a) $\sum_{k=1}^{2016} i^k$, **b)** $(1+i)^{14}$, **c)** $(1+i)^n+(1-i)^n$, **d)** $(\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12})^{20}$, **e)** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2016}$.

3) Demuéstrese que $|z+w|^2\le|z|^2+|w|^2+2|z\,w|$, para $z,\ w\in\mathbb{C}$ arbitrarios.

4) Sea $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Demuestre que $|x|+|y|\le\sqrt{2}|z|$, y que la igualdad se tiene si y sólo si $|x|=|y|$.
Ayuda: Si $a,b\in\mathbb{R}$, entonces $2ab\le a^2+b^2$ (con igualdad sólo si $a=b$).

5) Compruebe la identidad $|1+z\overline{w}|^2+|z-w|^2=(1+|z|^2)(1+|w|^2)$, donde $z,\ w\in\mathbb{C}$.

6) Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $|z|=1$, entonces para todos $a,b\in\mathbb{C}\setminus\{-\overline{(a/b)}\}$ se cumple $\left|\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|=1$.

b) Si $|a|<1$, entonces $|z|<1$ es equivalente a $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<1$.

7) Demuestre que:

a) $\operatorname{sen}(3x)=3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3x$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

b) La función $\cos(n\varphi)$ es un polinomio de grado n de $\cos\varphi$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

8) Demuestre que $\left(\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n=\dfrac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}$, para cualquier $\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$.

9) Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $z\neq1$ entonces $1+z+z^2+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

b) Si $\omega\neq1$ es una raíz n-ésima de la unidad, entonces

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n=0,\qquad 1+2\omega+3\omega^2+\cdots+n\omega^{n-1}=\frac{n}{\omega-1}.$$

c) Si $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\neq0$, entonces

$$1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right),$$

y

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \cdots + \operatorname{sen} n\theta = \frac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}\theta)\operatorname{sen}(\frac{n}{2}\theta)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

Ayuda: Use el apartado a) con $z = e^{i\theta}$.

10) Sin realizar cálculos, razónese que ninguno de los valores de $\sqrt[2016]{1+i}$ puede ser $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.

11) Calcule todos los valores de

a) $\sqrt[4]{-16}$, **b)** $(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{1/3}$, **c)** $\sqrt[4]{1-i}$, **d)** $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$.

12) Demuestre que si w es una solución de $z^n = \mu$ (con $\mu \in \mathbb{C}$ fijo), entonces todas las soluciones son $w\omega_0, w\omega_1, w\omega_2, \ldots, w\omega_{n-1},$ donde $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, son las raíces n-ésimas de la unidad. Después encuentre razonadamente las soluciones de $z^6 - 8 = 0$.

13) En este ejercicio, consideraremos sólo el *valor principal de la raíz cuadrada*, definido como $\sqrt[(p)]{z} = \sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}\right)$ cuando $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ con $-\pi < \theta \leq \pi$. Claramente, $(\sqrt[(p)]{z})^2 = z$.

a) Demuestre que las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $az^2 + bz + c = 0$, con $a \neq 0$, son

$$z = \frac{-b \pm \sqrt[(p)]{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

b) Calcule $\sqrt[(p)]{(\sqrt[(p)]{i})^5}$ y $\sqrt[(p)]{1 + \sqrt[(p)]{i}}$.

14) Demuestre las siguientes desigualdades partiendo de consideraciones geométricas

a) $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \leq |\operatorname{Arg} z|$, **b)** $|z-1| \leq ||z|-1| + |z||\operatorname{Arg} z|$.

15) ¿Cuando son colineales tres puntos z_1, z_2, z_3, distintos dos a dos? Escríbase una condición analítica, la más sencilla posible.

16) Este ejercicio recoge algunas relaciones entre los números complejos y las rectas en el plano.

a) Compruebe que la ecuación $\operatorname{Re}(az+b) = 0$, con $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$, define una recta en el plano y que, recíprocamente, cada recta viene descrita por una ecuación de este tipo.

b) Encuentre los números a, b para que la recta pase por dos puntos dados z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$.

c) Demuestre que las rectas determinadas por las ecuaciones $\operatorname{Re}(az+b) = 0$ y $\operatorname{Re}(cz+d) = 0$, respectivamente, son perpendiculares si y sólo si $\operatorname{Re}(a\overline{c}) = 0$.

d) Demuestre que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados z_1 y z_2, puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

17) Resuelva las siguientes ecuaciones (donde $z \in \mathbb{C}$):

a) $(z+1)^4 + i = 0$; **b)** $\operatorname{Re}(z^2+5) = 0$; **c)** $\operatorname{Re}(z+5) = \operatorname{Im}(z-i)$.

18) Describa el conjunto del plano complejo determinado por las siguientes relaciones:

a) $|z-2| - |z+2| > 3$, **b)** $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$, **c)** $|2z| > |1+z^2|$, **d)** $\operatorname{Im} \dfrac{1}{z+i} = 0$.

19) Determine las ecuaciones complejas:

a) de la parábola con foco i y directriz $\operatorname{Im} z = -1$.

b) de la elipse con focos ± 1 que pasa por i.

c) de la hipérbola con focos ± 1 que pasa por $1+i$.

20) Dibuje el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

a) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z}{1+i}\right) = 0$; **b)** $\left|z^2 - 4z + 4\right| = 4$; **c)** $\left|z^2 - 2z - 1\right| = 2$.

21) Describa geométricamente el conjunto de los puntos $w \in \mathbb{C}$ que tienen la forma $w = iz^2 + 1$, para $z = x + iy$ con $x > 0$, $y > 0$, $x^2 + y^2 < 1$.

22) Halle razonadamente el supremo y el ínfimo del siguiente conjunto de números reales (y explique, en ambos casos, si se alcanzan el máximo y/o el mínimo):

a) $\{|z^{12} - a| : \ z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$, donde $a \in \mathbb{C}$ es un número fijo.

b) $\left\{\operatorname{Re}(iz^4 + 1) : \ |z| < \sqrt{2}\right\}$.

23) Demuestre que, dados $a, c \in \mathbb{C}$, la condición necesaria y suficiente para que exista $z \in \mathbb{C}$ que verifique $|z+a| + |z-a| = 2|c|$ es que sea $|a| \leq |c|$.
Ayuda: Si $\lambda > 0$, el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z+a| + |z-a| = 2\lambda\}$ es una elipse si $\lambda > |a|$, un segmento si $\lambda = |a|$ y el conjunto vacío si $\lambda < |a|$.

24) Demuestre que la condición necesaria y suficiente para que $\{z_1, z_2, z_3\}$ sean los vértices de un triángulo equilátero es que

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$