Variable Compleja I (3º de Matemáticas y 4º de Doble Titulación)

Ejemplos y problemas resueltos de análisis complejo (2015-16)

Teorema de Liouville. Estimaciones de Cauchy

El siguiente resultado básico es una consecuencia de la fórmula integral de Cauchy.

Teorema de Liouville. *Toda función entera y acotada es constante.*

Comentario: de hecho, es suficiente pedir que esté acotada en un entorno del infinito: $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ ya que la función continua $|f|$ está siempre acotada en el disco compacto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$.

Problema 1 *Identifique todas las funciones enteras, f, que cumplan*

$$|f(z)| < |e^z| \qquad \textit{para todo} \quad z \in \mathbb{C}.$$

SOLUCIÓN. Puesto que $e^z \neq 0$ en $\mathbb{C}$, podemos definir la función $g(z) = f(z)/e^z$. Esta función es entera y satisface la condición $|g(z)| < 1$ para todo z en $\mathbb{C}$. Por el Teorema de Liouville, $g \equiv cte = \lambda$; es decir, $f(z) = \lambda e^z$. Además, por la desigualdad impuesta, se sigue que $|\lambda| < 1$.

Recíprocamente, es inmediato que toda función de la forma $f(z) = \lambda e^z$ con $|\lambda| < 1$ cumple la condición $|f(z)| < |e^z|$ para todo z. ■

Problema 2 *Pruebe que una función entera f satisface*

$$f(z+1) = f(z), \quad f(z+i) = f(z) \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}$$

si y sólo si f es una función constante.

SOLUCIÓN. Es fácil probar por inducción que

$$f(z+m) = f(z), \quad f(z+in) = f(z)$$

para todo m, $n \in \mathbb{N}$. Luego, poniendo $z - m$ y $z - in$ respectivamente en vez de z, vemos que las mismas ecuaciones se cumplen para todo m, $n \in \mathbb{Z}$. De esta manera vemos que los valores que toma f en el plano son los que toma en un cuadrado cualquiera de lado uno, por ejemplo, en

$$Q = \{z = x + yi : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}.$$

Puesto que el conjunto Q es compacto y f es continua ahí, su módulo alcanzará su máximo en Q. Por tanto, existe una constante positiva y finita M tal que

$$|f(z)| \le M, \quad \text{para todo } z \in Q.$$

Debido a la periodicidad de f observada arriba, se sigue que

$$|f(z)| \le M, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Por tanto, f es entera y está acotada en $\mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville, $f \equiv cte$.

En la dirección recíproca, es obvio que si f es constante entonces cumple ambas condiciones

$$f(z+1) = f(z), \qquad f(z+i) = f(z). \qquad \blacksquare$$

También es útil la siguiente generalización del teorema de Liouville.

Estimaciones de Cauchy. *Si f es una función entera y cumple $|f(z)| \le M|z|^\alpha$ para ciertos números $a > 0$, $M > 0$ y para todo z tal que $|z| > R > 0$, entonces f es un polinomio de grado, como mucho, $[\alpha]$.*

Aquí, como es habitual, $[\alpha]$ denota la parte entera de α, es decir, el único número entero n tal que $n \le \alpha < n+1$ (por ejemplo, $[\pi] = 3$ y $[-\sqrt{2}] = -2$).

Problema 3 *Si f es una función entera que cumple*

$$|f(z)| \le \frac{3104 \cdot |z|^{4,7}}{|z|^2+3}, \quad |z| \ge 1,$$

demuestre que sólo puede ser o una constante, o una función lineal o un polinomio cuadrático.

SOLUCIÓN. Observando que

$$\frac{|z|^2}{|z|^2+3} \le 1$$

para todo z, se sigue que

$$|f(z)| \le \frac{3104 \cdot |z|^{4,7}}{|z|^2+3} \le 3104\,|z|^{2,7}, \quad |z| \ge 1.$$

Por las estimaciones de Cauchy, concluimos que f es un polinomio de grado, como mucho, $[2,7] = 2$ (y, por tanto, constante, lineal o cuadrático).

Principio de los ceros aislados (teorema de unicidad)

Teorema. *Sea Ω un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω. Supongamos que $f(z_n) = 0$ para una sucesión infinita de puntos, $z_n \in \Omega$, convergente a un punto $a \in \Omega$ (siendo todos los $z_n \ne a$). Entonces $f \equiv 0$ en Ω.*

Es fácil comprobar que este enunciado es equivalente al siguiente:

Teorema de unicidad. *Sea Ω un dominio en el plano y f y g dos funciones holomorfas en Ω. Supongamos que $f(z_n) = g(z_n)$ para una sucesión infinita de puntos, $z_n \in \Omega$, convergente a un punto $a \in \Omega$ (siendo todos los $z_n \ne a$). Entonces $f \equiv g$ en Ω.*

Otra manera equivalente de expresar lo mismo es como sigue:

Principio de los ceros aislados. *Si Ω es un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω, no idénticamente nula, entonces los ceros de f no se pueden acumular en ningún punto de Ω. Es decir, los ceros de f son todos aislados: para cada $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$ existe $r > 0$ tal que $f(z) \ne 0$ cuando $0 < |z-a| < r$.*

Observación. Como corolario, la cantidad de ceros que tiene cualquier función analítica (no idénticamente nula) es finita o numerable.

Es importante resaltar que sí es posible que los ceros de una función holomorfa no idénticamente nula se acumulen en alguno o en muchos puntos del borde del dominio. Un ejemplo sencillo sería la función $f(z) = \operatorname{sen}(\pi/z)$, holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y obviamente no idénticamente nula allí. Sus ceros son precisamente los puntos $1/n$, $n \in Z$ que se acumulan en el punto $0 \in \partial\Omega$.

Ejemplo 1 *Sabiendo sólo que f es holomorfa en el disco unidad, $\mathbb{D}$, y que*

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right)=0\,,\qquad n=1,2,\dots,$$

se deduce que $f\equiv 0$ en $\mathbb{D}$ ya que los puntos $1/(n+1)$ todos están en $\mathbb{D}$, son distintos dos a dos y convergen al punto 0 que también está en $\mathbb{D}$.

Suponiendo que f se anula en los números irracionales en el intervalo $(4/5,1)\subset\mathbb{D}$, obtendríamos la misma conclusión porque los irracionales son densos en dicho intervalo y contienen una sucesión de números que converge a $9/10$, por ejemplo (no vale con una sucesión convergente a 1 porque el punto 1 no está en $\mathbb{D}$).

Problema 4 *Halle todas las funciones holomorfas en el disco $D(1;1)=\{z:\ |z-1|<1\}$ y que allí satisfagan la condición*

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right)=1-\frac{1}{2n^2+2n+1}$$

SOLUCIÓN. Consideremos los puntos $z_n=n/(n+1)$. Despejando n de la igualdad $z_n=n/(n+1)$, obtenemos que $n=z_n/(1-z_n)$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de arriba, se obtiene

$$f(z_n)=1-\frac{1}{2\left(\frac{z_n}{1-z_n}\right)^2+2\left(\frac{z_n}{1-z_n}\right)+1}=1-\frac{(1-z_n)^2}{2z_n^2+2z_n(1-z_n)+(1-z_n)^2}=1-\frac{(1-z_n)^2}{1+z_n^2}=\frac{2z_n}{1+z_n^2}\,.$$

Esto nos sugiere una función que obviamente cumple esta condición:

$$f(z)=\frac{2z}{1+z^2}\,.$$

¿Puede haber otras funciones con las mismas propiedades? Veremos que no.

Todos los puntos z_n están en el disco $D(1;1)=\{z:\ |z-1|<1\}$; además, $\lim_{n\to\infty} z_n=1$ y este límite también está en $D(1;1)=\{z:\ |z-1|<1\}$. Según el Teorema de unicidad, si dos funciones holomorfas en el disco indicado coinciden en todos los puntos z_n, entonces coinciden en todo el disco. Por tanto, la función encontrada es la única con dicha propiedad. ■

Problema 5 *Halle todas las funciones $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ que satisfagan la condición $f(z)=f(z^2)$, para todo $z\in\mathbb{D}$.*

SOLUCIÓN. Sea $a\in\mathbb{D}$ arbitrario; entonces $|a|<1$ y, por tanto, lo mismo es cierto para todo a^k, $k\in\mathbb{N}$; además, $\lim_{k\to\infty}|a^k|=\lim_{k\to\infty}|a|^k=0$. Aplicando la condición $f(z)=f(z^2)$ a los puntos $z=a$, $z=a^2$, $z=a^4$, etc. sucesivamente, obtenemos que

$$f(a)=f(a^2)=f(a^4)=f(a^8)=\dots$$

y, en general, $f(a^{2^n})=f(a)$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Dado que $a^{2^n}\in\mathbb{D}$ para todo $n\in\mathbb{N}$, $a^{2^n}\to 0$ cuando $n\to\infty$ y $0\in\mathbb{D}$, el Principio de los ceros aislados nos dice que $f\equiv f(a)=cte$ en $\mathbb{D}$.

Existe, al menos, una solución alternativa. Puesto que $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$, podemos escribir f como una serie de potencias convergente en $\mathbb{D}$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\,.$$

La condición $f(z) = f(z^2)$ nos dice que para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + +a_5 z^5 + a_6 z^6 + \ldots = a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + +a_3 z^6 + a_4 z^8 + \ldots$$

Teniendo en cuenta la unicidad de la serie de Taylor y comparando los coeficientes a ambos lados, se deduce que

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0\,, \qquad a_2 = a_1\,, a_4 = a_2\,, a_6 = a_3\,, a_8 = a_4\,, \ldots$$

y, por tanto, $a_k = 0$ para todo $k \ge 1$, luego $f \equiv cte$. ■

Teorema de Rouché. Principio del argumento

Recordemos que

$$\operatorname{Ind}(0;\Gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w}$$

denota al índice de una curva Γ respecto al origen (el número de vueltas que da Γ alrededor del origen). Por razones topológicas, la imagen $f(\gamma)$ de una curva, γ, por una función continua, f, también es una curva.

Principio del argumento. *Sea Ω un dominio en el plano y γ una curva cerrada y simple, C^1 a trozos, contenida en Ω junto con el dominio que acota y orientada positivamente. Si f es una función holomorfa en Ω tal que $f(z) \neq 0$ para todo z en γ y sus ceros en el dominio interior a γ son $a_1, \ldots, a_N$ (contando las multiplicidades), entonces*

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \operatorname{Ind}(0; f(\gamma)) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f\,,$$

donde $\Delta_\gamma \arg f$ denota la variación total del argumento del punto $f(z)$ cuando z recorre la curva γ.

Teorema de Rouché. *Sea Ω un dominio en el plano y γ una curva cerrada y simple, C^1 a trozos, contenida en Ω junto con el dominio que acota. Si f y g son dos funciones holomorfas en Ω tales que $|f(z)| > |g(z)|$ para todo z en γ, entonces las funciones f, $f - g$ y $f + g$ tienen el mismo número de ceros en el dominio interior a la curva γ:*

$$N_\gamma(f) = N_\gamma(f-g) = N_\gamma(f+g)\,,$$

contando las multiplicidades.

Ejercicio 1 *Halle el número de soluciones de la ecuación $3z^4 + 7z^3 - z + 2 = 0$ en el disco unidad $\mathbb{D}$ y en su exterior $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.*

SOLUCIÓN. Sean $f(z) = 7z^3$ y $g(z) = 3z^4 - z + 2$. Ambas son enteras y en la circunferencia unidad, $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1$, cumplen la desigualdad

$$|f(z)| = 7 > 6 \ge 3|z|^4 + |-z| + 2 \ge |3z^4 - z + 2| = |g(z)|$$

por la desigualdad triangular. Por tanto, tenemos en $\mathbb{T}$ la desigualdad estricta $|f(z)| > |g(z)|$ y podemos aplicar el Teorema de Rouché. Según dicho resultado, el número de ceros de la función $(f+g)(z) = 3z^4 + 7z^3 - z + 2$ en el disco unidad $\mathbb{D}$ es igual al de la función f. Ya sabemos que éste es igual a 3, teniendo en cuenta las multiplicidades. Por tanto, la función $f + g$ tiene 3 ceros en $\mathbb{D}$.

Al ser un polinomio de grado 4, la función $f + g$ tiene 4 ceros en el plano, contando las multiplicidades. Es fácil ver que no tiene ningún cero en el círculo unidad $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$; esto se sigue de la desigualdad demostrada arriba y la desigualdad triangular: $|f + g| \ge |f| - |g| > 0$ en $\mathbb{T}$. Por tanto, sólo tiene un cero en el exterior del disco.

Ejercicio 2 *Sea Ω un dominio plano que contiene al disco unidad, $\mathbb{D}$ y f una función holomorfa en Ω tal que $|f(z)| < 1$ para todo z que cumple $|z| = 1$. Demuestre que f tiene en $\mathbb{D}$ exactamente un punto fijo (un punto a tal que $f(a) = a$).*

SOLUCIÓN. Decir que a es un punto fijo de f es equivalente a decir que a es una solución de la ecuación $z - f(z) = 0$. El Teorema de Rouché nos ayudará a contar el número de ceros de esta función en $\mathbb{D}$. Dado que en la circunferencia unidad las funciones f y z, ambas holomorfas en Ω, cumplen la desigualdad estricta $|f(z)| < 1 = |z|$, se sigue por Rouché que $z - f(z)$ tiene en $\mathbb{D}$ el mismo número de ceros que la función identidad, que es exactamente uno. ∎

Ejercicio 3 *Demuestre que el polinomio $p(z) = z^4 + iz + 1$ tiene exactamente dos ceros:*

(a) en el semiplano derecho $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

(b) en el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

SOLUCIÓN. Antes que nada, observemos que, al ser p un polinomio de grado 4, tiene que tener exactamente cuatro soluciones complejas, teniendo en cuenta las posibles multiplicidades. Ninguno de esos ceros puede ser real ya que para un número real x la igualdad $p(x) = 0$ implicaría $x^4 + 1 = 0$ (igualando las partes real e imaginaria a cero), lo cual es imposible.

(a) Este apartado admite una solución elemental, debido a sus características particulares. En general, dado que p no tiene todos los coeficientes reales, de ninguna manera se sigue que si z_0 es una raíz, entonces $\overline{z}_0$ también lo es. No obstante, es fácil observar que si z_0 es una raíz, entonces $-\overline{z}_0$ es otra. En efecto, si $p(z_0) = 0$, conjugando la ecuación, obtenemos

$$0 = \overline{p(z_0)} = \overline{z}_0^4 - i\overline{z}_0 + 1 = \overline{(-z_0)}^4 + i \cdot (\overline{-z}_0) + 1 = p(-\overline{z}_0)\,.$$

Geométricamente, es fácil ver que si z_0 está en el semiplano derecho, entonces $-\overline{z}_0$ está en el izquierdo y viceversa. Por tanto, el número de ceros en el semiplano izquierdo es igual al número de ceros en el semiplano derecho. Como en total hay 4 y también es fácil comprobar que p no tiene ceros en el eje imaginario, tiene que haber exactamente dos ceros de p en el semiplano derecho y otros dos en el izquierdo.

(b) Aquí seguiremos el método de observar la variación total del argumento de $f(z)$ mientras z recorre la frontera de un dominio "suficientemente grande" y contenido en el semiplano superior.

Dado que p tiene sólo una cantidad finita de ceros en el plano y, por consiguiente, en el semiplano superior, existe una cota finita para los módulos de sus ceros. Esto significa que para R suficientemente grande, cualquiera que sea un cero de p en el semiplano superior, estará contenido en el dominio interior a la curva γ_R, donde γ_R es una vez más la curva compuesta por el segmento $I_R = [-R, R]$ de la recta real y por la semicircunferencia C_R contenida en el semiplano superior desde el punto R hasta el punto $-R$, orientada en el sentido positivo. Para ver cuántos ceros puede haber dentro del contorno γ_R, utilizamos el principio del argumento y contamos el número de vueltas que da la curva imagen $p(\gamma_R)$ alrededor del origen.

Para los puntos $z = x \in [-R, R]$ tenemos $p(x) = x^4 + 1 + ix$; es decir, $\operatorname{Re} p(x) \geq 1 > 0$, mientras que la parte imaginaria puede tomar tanto valores positivos como negativos; por tanto, los puntos $p(x)$ están todos en el primer cuadrante y en el cuarto, así que la curva imagen $p(I_R)$ cruza el eje real pero no da ninguna vuelta alrededor del origen (tiene una "pequeña" variación del argumento).

Para los puntos $z \in C_R$, podemos escribir

$$p(z) = z^4\left(1 + \frac{i}{z^3} + \frac{1}{z^4}\right).$$

Haciendo $R = |z|$ suficientemente grande, podemos hacer los valores i/z^3 y $1/z^4$ tan próximos a cero como se quiera, así que el valor $p(z)$ será muy próximo al valor z^4. Para $z \in C_R$ tenemos $z = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$, con lo cual $z^4 = R^4 e^{4it}$ y $0 \le 4t \le 4\pi$. Dado que el argumento de z^4 cambia desde 0 hasta 4π cuando z recorre la curva C_R, lo mismo pasará con el argumento de $p(z)$, salvo quizás una diferencia muy pequeña que recuperamos moviéndonos por el intervalo I_R, así que en total $p(z)$ da dos vueltas alrededor del origen cuando z recorre la curva γ_R. Según el Principio del argumento, la función p tiene dos ceros en el interior de γ_R. Dado que para R suficientemente grande no hay ceros fuera de γ_R, el número total de ceros de p en el semiplano superior tiene que ser dos.

(Comentario: otros métodos de solución son posibles.)

Teorema de la aplicación abierta, principio del módulo máximo, lema de Schwarz

Teorema de la aplicación abierta. *Sea Ω un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω. Entonces o bien $f \equiv cte$ o bien f es una aplicación abierta (es decir, para todo $U \subset \Omega$ abierto en el plano, el conjunto $f(U)$ es también abierto.*

Ejercicio 4 *Explique razonadamente por qué, si f es holomorfa en un dominio Ω, es imposible que $f(\Omega) = \mathbb{R}$.*

SOLUCIÓN. El conjunto $\mathbb{R}$ no es abierto en $\mathbb{C}$ ya ningún disco puede estar contenido en $\mathbb{R}$. Según el Teorema de la aplicación abierta, sabemos que o bien f es abierta, en cuyo caso $f(\Omega)$ es abierto y no puede ser $\mathbb{R}$, o bien es constante, en cuyo caso $f(\Omega)$ es un conjunto que consiste en un único punto y, por tanto, tampoco puede ser $= \mathbb{R}$. ■

Ejercicio 5 *Si f es holomorfa y no constante en un dominio Ω donde cumple $|f(z)| \le 1$ entonces, de hecho, $|f(z)| < 1$ en Ω. Razone por qué.*

SOLUCIÓN. Supongamos que $|f(a)| = 1$ para cierto $a \in \Omega$. Sea $b = f(a)$. Puesto que f no es constante, es una aplicación abierta y, por tanto, $f(\Omega)$ es un conjunto abierto. Dado que $b \in f(\Omega)$, existe un radio $r > 0$ tal que el disco abierto $D(b;r) = \{z : |w - b| < r\}$ está contenido en $f(\Omega)$. Teniendo en cuenta que $|b| = 1$, es obvio que el disco $D(b;r)$ contiene un punto c tal que $|c| > 1$; por ejemplo, podemos tomar $c = (1 + \frac{r}{2|b|})b$ ya que $|b - c| = \frac{r}{2} < r$. Pero $c \in D(b;r) \subset f(\Omega)$ así que $c = f(z)$ para cierto $z \in \Omega$ y $|f(z)| = |c| = |b| + \frac{r}{2} = 1 + \frac{r}{2} > 1$, lo cual contradice nuestra hipótesis de que $|f(z)| \le 1$ para todo $z \in \Omega$. Por tanto, concluimos que $|f(z)| < 1$ para todo z en Ω. ■

Principio del módulo máximo (Primera versión). *Sea Ω un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω. Si $|f|$ alcanza su máximo en un punto del dominio Ω, entonces $f \equiv cte$.*

Dicho en un lenguaje menos formal, la gráfica de la función $|f|$ vista como subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que se erige sobre el dominio Ω en el plano es un "paisaje sin picos".

Principio del módulo máximo (Segunda versión). *Sea Ω un dominio acotado en el plano y f una función holomorfa en Ω y continua en su cierre, $\overline{\Omega}$. (Obsérvese que, al ser continua, la función $|f|$ alcanza su máximo en el conjunto compacto $\overline{\Omega}$.) Entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{\partial\Omega} |f(z)|.$$

Es decir, el módulo máximo en este caso sólo se puede alcanzar en el borde del dominio si f no es constante. (Si es constante, se alcanza trivialmente en todo $\overline{\Omega}$.)

Ejercicio 6 *Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unidad y $\overline{\mathbb{D}}$ su cierre. Sea f una función no constante, $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$. Sólo una de las siguientes situaciones es posible. ¿Cuál de ellas?*

(a) $|f| \le 3$ en $\overline{\mathbb{D}}$, $f(0) = -3$;
(b) $|f| \le 3$ en $\overline{\mathbb{D}}$, $f(1) = 3$;
(c) $|f| \le 3$ en $\overline{\mathbb{D}}$, $f(0) = 3(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})$;
(d) Se cumple $f(1/2) = 4$; ademas, si $x^2 + y^2 = 1$ entonces $f(x + iy) = 3$.

SOLUCIÓN. Dado que $f \neq cte$, las condiciones (a), (c) y (d) contradicen al Principio del módulo máximo (en su segunda versión) ya que todos los valores en los puntos concretos en el dominio resultan ser números de módulo uno, mientras que (b) es posible, siendo el punto $z = 1$ un punto del borde del dominio. Un ejemplo concreto sería la función $f(z) = z + 2$ que cumple las condiciones del apartado (b). ■

Ejercicio 7 *Demuestre que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $|f(z)| \le 1 - |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces $f \equiv 0$.*

SOLUCIÓN. Si f es constante, digamos $f \equiv C$, entonces $|C| \le 1 - |z|$ para todo z en $\mathbb{D}$. Dejando que $|z| \to 1^-$, obtenemos $|C| \le 0$ y se deduce que $C = 0$, lo cual prueba la afirmación del problema.

Nos queda ver que es imposible el caso de una función f no constante. La idea principal consiste en demostrar que, bajo las hipótesis del problema, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $|f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Dejando que $\varepsilon \to 0^+$, esto implicará que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}$, lo cual contradice nuestras hipótesis. Para completar esta reducción al absurdo, sólo nos queda hacer demostrar de forma rigurosa la afirmación "para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene que $|f(z)| < \varepsilon$".

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Si $|z| > 1 - \varepsilon$, entonces por las hipótesis del problema, $|f(z)| \le 1 - |z| < \varepsilon$. Veamos qué es lo que ocurre en el resto del disco, es decir, cuando $|z| \le 1 - \varepsilon$. El conjunto $K_\varepsilon = \{z : |z| \le 1 - \varepsilon\}$ es cerrado y acotado y, por tanto, compacto así que la función continua $|f|$ alcanza en él su máximo:

$$\max_{K_\varepsilon} |f(z)| = |f(z_0)|,$$

para cierto $z_0 \in K_\varepsilon$. Si este máximo fuera $\ge \varepsilon$, entonces el módulo máximo de $|f|$ en $\mathbb{D}$ sería justo $|f(z_0)|$ ya que en el resto f tiene módulo menor que ε. Pero el Principio del módulo máximo (en su primera versión, ya que la función no está definida en el borde de $\mathbb{D}$) nos dice que una función holomorfa y no constante no puede alcanzar su módulo máximo en un punto del dominio (en este caso, no puede hacerlo en z_0). Por lo tanto, se sigue que

$$\max_{K_\varepsilon} |f(z)| < \varepsilon$$

y, por tanto, $|f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Esto completa la demostración. ■

Lemma de Schwarz. *Sea f una función holomorfa en el disco unidad, $\mathbb{D}$, que cumple las siguientes condiciones: $f(0) = 0$ y $|f(z)| \le 1$ para todo z en $\mathbb{D}$. Entonces:*

(a) $|f(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
(b) $|f'(0)| \le 1$.

Si se cumple la igualdad en (a) para un $z \neq 0$ o en (b), entonces f es una rotación: $f(z) = \lambda z$ para cierto número λ tal que $|\lambda| = 1$.

Por lo que comentamos en un ejercicio anterior, la hipótesis "$|f(z)| \le 1$ para todo z en $\mathbb{D}$" en el Lema de Schwarz es equivalente a la aparentemente más fuerte "$|f(z)| < 1$ para todo z en $\mathbb{D}$". Por eso con frecuencia también enunciamos el Lema de Schwarz con la hipótesis $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Ejercicio 8 *Supongamos que $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$ y $|f(z)| \le |z+3/2|$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Demuéstrese que $|f(1/2)| \le 1$ y hállense todas las funciones para las que se cumple la igualdad.*

SOLUCIÓN. Consideremos la función auxiliar

$$g(z) = \frac{f(z)}{z+3/2}.$$

Dado que $z \neq -3/2$ para todo $z \in \mathbb{D}$, g es holomorfa en $\mathbb{D}$ y, por hipótesis, cumple $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Además, $g(0) = 0$, así que podemos aplicar el Lema de Schwarz a esta función para deducir que $|g(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$; es decir, $|f(z)| \le |z+3/2|$. En particular, para $z = 1/2$, se obtiene que $|f(1/2)| \le 1$.

Si se cumple la igualdad en $|f(1/2)| \le 1$, esto significa que $|g(1/2)| = 1/2$ y, por tanto, tenemos la igualdad en el Lema de Schwarz. Sabemos que esto sólo es posible cuando $g(z) = cz$, $c = cte$, $|c| = 1$, es decir, cuando $f(z) = cz(z+3/2)$, $|c| = 1$.

Ejercicio 9 *Supongamos que $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, $f(0) = f'(0) = 0$ y $|f(z)| \le 1$ para todo z en el disco unidad. Demuestre que, de hecho, $|f(z)| \le |z|^2$ para todo $z \in \mathbb{D}$.*

SOLUCIÓN. Conviene definir la función

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & \text{si } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \\ f'(0) = 0, & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Puesto que

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0) = g(0),$$

la función g tiene una singularidad evitable en el origen y es continua en ahí. Por tanto, $g \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$. Además, podemos aplicar el lema de Schwarz a f para deducir que $|f(z)| \le |z|$ en $\mathbb{D}$. Por consiguiente,

$$|g(z)| \le 1 \text{ en } \mathbb{D} \quad \text{y} \quad g(0) = f'(0) = 0$$

Aplicando de nuevo el lema de Schwarz pero esta vez a la función g, obtenemos que $|g(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Cuando $z \neq 0$, esto implica que $|f(z)| \le |z|^2$. Para $z = 0$, esta desigualdad se cumple trivialmente (es una igualdad). ■

Preparado por Dragan Vukotić,
coordinador de la asignatura