Variable Compleja I (2015-16)
Ejercicios resueltos

Las convergencias puntual y uniforme de sucesiones y series de funciones

Recordemos la definición de la convergencia uniforme: $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N\ \forall z \in A \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon\,.$$

Es irrelevante si ponemos $< \varepsilon$ ó $\le \varepsilon$ en la definición arriba. La formulación con $\le \varepsilon$ es equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N\ \sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| \le \varepsilon\,.$$

Es decir, $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ en A si y sólo si $\sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 1 *Demuestre que la sucesión de funciones complejas $f_n(z) = z^n$:*
(a) converge a cero si $|z| < 1$;
(b) converge a 0 uniformemente en cualquier subconjunto compacto del disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;
(c) no converge uniformemente en $\mathbb{D}$.
(d) diverge si $|z| \ge 1$ y $z \ne 1$.

SOLUCIÓN. (a) Sabemos de Cálculo I que si $q \in \mathbb{R}$ y $|q| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Por tanto, si $|z| < 1$, tomando como $q = |z|$, vemos que $|z^n| = |z|^n \to 0$, lo cual significa que $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$.

(b) Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ (notación frecuente: $K \Subset \mathbb{D}$). Puesto que K es cerrado y acotado, es fácil ver (y lo hemos justificado con detalle en clase) que existe un número R, $0 < R < 1$, tal que para todo $z \in K$ se cumple $|z| \le R$. Si $z \in K$ entonces $|z^n| = |z|^n \le R^n$ así que

$$\sup_{z\in K} |z^n - 0| \le R^n \to 0\,, \qquad n \to \infty\,.$$

Por lo tanto, $z^n \rightrightarrows 0$ en K.

(c) La sucesión $f_n(z) = z^n \to 0$ para cada $z \in \mathbb{D}$ así que sólo tenemos que examinar si $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| \to 0$ o no cuando $n \to \infty$. Resulta que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |z|^n \ge \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\,.$$

Puesto que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} > 0$ cuando $n \to \infty$, se sigue que $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| \not\to 0$, así que la convergencia no es uniforme en $\mathbb{D}$.

(d) Sabemos de Cálculo I que $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ cuando $q \in \mathbb{R}$ y $q > 1$. Si $|z| > 1$ entonces $|z^n| = |z|^n \to +\infty$, lo cual significa por definición que $\lim_{n\to\infty} z^n = \infty$ (en el plano complejo extendido).

Queda por comprobar que z^n diverge si $|z| = 1$ y $z \ne 1$. Equivalentemente, veremos que $|z| = 1$ junto con la convergencia de z^n a un valor implica que $z = 1$.

Sea $z = e^{it}$. Por la fórmula de A. de Moivre, $z^n = e^{int} = \cos nt + i \operatorname{sen} nt$. Si esta sucesión compleja converge, entonces también convergen las sucesiones reales $x_n = \cos nt$ e $y_n = \operatorname{sen} nt$. Veremos que esto sólo es posible cuando $e^{it} = 1$. Sean $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ e $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Entonces también $x = \lim_{n\to\infty} x_{2n}$ e $y = \lim_{n\to\infty} y_{2n}$. Eso significa que

$$x_{2n} = \cos 2nt = 2\cos^2 nt - 1 = 2x_n^2 - 1\,, \qquad y_{2n} = \operatorname{sen} 2nt = 2\operatorname{sen} nt \cos nt = 2x_n y_n\,.$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$, obtenemos que

$$x = 2x^2 - 1\,, \qquad y = 2xy\,.$$

De la segunda igualdad se sigue que o bien $y = 0$ o bien $x = 1/2$. Como el valor $x = 1/2$ no satisface la condición $x = 2x^2 - 1$, se sigue que $y = 0$. Puesto que la identidad básica $\cos^2 nt + \operatorname{sen}^2 nt = 1$ implica $x^2 + y^2 = 1$, concluimos que $x = 1$ ó $x = -1$. De nuevo, $x = -1$ incumple $x = 2x^2 - 1$, así que $x = 1$. Por lo tanto, hemos llegado a la conclusión de que $\cos nt \to 1$, $\operatorname{sen} nt \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Usando esta última conclusión y tomando el límite cuando $n \to \infty$ en la fórmula

$$x_{n+1} = \cos(nt + t) = \cos nt \cos t - \operatorname{sen} nt \operatorname{sen} t$$

obtenemos $1 = \cos t$, mientras que tomando el límite cuando $n \to \infty$ en la fórmula

$$y_{n+1} = \operatorname{sen}(nt + t) = \operatorname{sen} nt \cos t + \cos nt \operatorname{sen} t$$

obtenemos $0 = \operatorname{sen} t$ y, por tanto, $z = e^{it} = 1$, que es lo que queríamos demostrar.

Recordemos que la serie compleja $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ <u>converge absolutamente</u> si converge la serie asociada de números positivos $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Como en Cálculo I, si una serie converge absolutamente entonces converge y su suma cumple $\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

La serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ <u>converge uniformemente</u> en $A \subset \mathbb{C}$ a la suma $S(z)$ si las sumas parciales $S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$ convergen uniformemente a la función $S(z)$ en $A \subset \mathbb{C}$.

El *Criterio de Weierstrass* nos dice que si para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in A$ se cumple $|f_n(z)| \le M_n$ y la serie de números positivos $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A y absolutamente para todo $z \in A$ y su suma satisface la desigualdad $\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$.

Ejercicio 2 *Demuestre que las series complejas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\cos(nz)\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}\operatorname{sen}(nz)$$

convergen absoluta y uniformemente en cada banda horizontal cerrada

$$\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \colon |Im\, z| \le 1 - \varepsilon\}\,, \quad \varepsilon > 0\,.$$

SOLUCIÓN. Cuando $z = x + iy \in \Omega_\varepsilon$, tenemos $|y| \le 1 - \varepsilon$ y, por tanto, $e^{\pm y} \le e^{1-\varepsilon}$. Luego

$$\begin{aligned} |e^{-n}\cos nz| &= \left| e^{-n} \cdot \frac{e^{inz} + e^{-inz}}{2} \right| = \frac{e^{-n}}{2} \cdot \left| e^{inx}e^{-ny} + e^{-inx}e^{ny} \right| \\ &\le \frac{e^{-n}}{2} \cdot \left(e^{-ny} + e^{ny} \right) \le \frac{e^{-n}}{2} \cdot 2 \cdot e^{n(1-\varepsilon)} = e^{-n\varepsilon}\,. \end{aligned}$$

La serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\varepsilon}$ es sumable por ser una serie geométrica cuya razón es $q = e^{-\varepsilon} < 1$. El criterio de Weierstrass implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cos nz$ converge absoluta y uniformemente en cada Ω_ε. ■

Series de potencias

Sean c y $a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ se denomina serie de potencias de centro c. Los números a_n son los coeficientes de la serie.

El *Teorema fundamental sobre la convergencia de series de potencias* afirma que si $R = 1/\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ (interpretando $1/+\infty = 0$ y $1/0 = +\infty$ en los casos extremos), entonces la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$:

- diverge cuando $|z-c| > R$;
- converge absolutamente cuando $|z-c| < R$;
- converge uniformemente en cada disco cerrado $|z-c| \leq r$, donde $r < R$.

El número R se denomina el radio de convergencia y $D(c;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| < R\}$ el círculo de convergencia de la serie de potencias.

Obsérvese que el teorema no indica nada acerca de la convergencia o divergencia en la circunferencia $|z-c| = R$ de centro c y radio R ya que caben todas las posibilidades: convergencia en toda la circunferencia, divergencia en cada punto de la circunferencia, convergencia en algunos puntos de la circunferencia y divergencia en el resto (véase el ejercicio siguiente).

Existe también la fórmula alternativa: $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$, cuando $a_n \neq 0$ para todo n y cuando el límite del cociente existe.

Las fórmulas para el radio de convergencia se suelen llamar las fórmulas de Cauchy-Hadamard.

Ejercicio 3 *Discuta la convergencia de las series funcionales* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ *en cada punto del plano.*

SOLUCIÓN. Ambas son series de potencias centradas en el origen ($c = 0$) así que es aplicable el Teorema fundamental sobre la convergencia de series de potencias. Puesto que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, en ambos casos la fórmula de Cauchy-Hadamard (con la raíz n-ésima) implica fácilmente que $R = 1$. Por tanto, ambas series convergen absolutamente en el disco unidad y divergen para $|z| > 1$. Además, convergen uniformemente en cualquier disco $|z| \leq r < 1$ (y, por tanto, en cualquier $K \Subset \mathbb{D}$).

La primera serie es la conocida serie geométrica cuyas sumas parciales son

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} \to \frac{1}{1-z}, \qquad N \to \infty.$$

Aunque la suma $\dfrac{1}{1-z}$ tiene sentido para todo $z \neq 1$, la serie geométrica sólo coincide con ella en $\mathbb{D}$, el disco unidad abierto, y no puede ser convergente en ningún punto de la circunferencia unidad ya que si $|z| = 1$, entonces o bien $z^n \to 1$ si $z = 1$ o bien z^n diverge (en el caso contrario) por el Ejercicio 1. Por tanto, el término general de la serie, $z^n \not\to 0$ en la circunferencia, luego la serie diverge allí.

Sin embargo, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ converge uniformemente en todo el disco unidad cerrado $|z| \leq 1$ debido al Criterio de Weierstrass ya que $\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ allí y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge. ■

Ejercicio 4 *Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2i)^n z^{n^3}.$$

SOLUCIÓN. Observemos primero que el coeficiente a_k de la serie es no nulo si y sólo si $k = n^3$ y que en este caso $n = k^{1/3}$. Así obtenemos la siguiente fórmula para el coeficiente k-ésimo:

$$a_k = \begin{cases} (-2i)^{k^{1/3}}, & \text{si } k = n^3, \\ 0, & \text{si } k \neq n^3. \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de Cauchy-Hadamard para el radio de convergencia, obtenemos

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} 2^{(k^{1/3}/k)} = \lim_{k\to\infty} 2^{k^{-2/3}} = 2^0 = 1.$$

Finalmente, $R = 1$. ■

En clase vimos el Teorema sobre derivación de series de potencias: si la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ tiene radio de convergencia R, $0 < R \leq +\infty$, entonces la función f es holomorfa en el disco abierto $D(c; R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < R\}$ y se puede derivar allí término por término:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z-c)^k,$$

siendo la derivada una nueva serie de potencias convergente en el mismo disco.

Ejercicio 5 *Calcule el radio de convergencia y la suma de las siguientes series de potencias:*

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{3n}}{n!}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) z^n.$$

SOLUCIÓN. (a) El radio de convergencia de la primera serie podría calcularse como en el problema anterior, teniendo en cuenta que muchos términos son nulos. No obstante, existe un método alternativo. Después del cambio de variable $w = z^3$, la serie se convierte en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^n}{n!}$. Dado que el término general de esta nueva serie:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

contiene factoriales, es conveniente calcular el radio de convergencia usando la fórmula del cociente:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

Puesto que la serie converge para cada $w = z^3$ finito, se sigue que la serie inicial también converge para todo z. Por lo tanto, su radio de convergencia es $+\infty$.

Podemos hacer más. Recordando que
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z ,$$
siendo la serie absolutamente convergente para todo z complejo y uniformemente convergente en todo disco cerrado (de radio finito), la primera serie puede escribirse como sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{3n}}{n!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^3)^n}{n!} = -e^{-z^3}$$

y se deduce que también converge absolutamente en todo el plano y uniformemente en cualquier disco cerrado.

(b) Como en el apartado anterior, calculamos fácilmente que el radio de convergencia de la segunda serie es
$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1 .$$

Recordemos que la serie geométrica también converge absolutamente en el disco unidad y su suma es $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$. Por tanto, se puede derivar término por término en el disco unidad, obteniendo:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} .$$

Derivando de nuevo, obtenemos

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}\right)' = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,z^{k-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,n\,z^{n-1} .$$

Finalmente, después de la multiplicación por z se obtiene

$$\frac{2z}{(1-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,n\,z^n .$$

■

Ejercicios de tipo mixto

Ejercicio 6 *¿Para qué valores de z converge la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$*?*

SOLUCIÓN. En primer lugar, cabe observar que la serie NO está escrita en forma de una serie de potencias. No obstante, después del cambio de variable
$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

se convierte en serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1-\frac{1+z}{1-z}} = \frac{1-z}{-2z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2z}.$$

Puesto que la serie geométrica sólo converge cuando $|w| < 1$, nuestra serie será convergente sólo para los z que cumplan $|1+z| < |1-z|$. Es decir, cuando $|z-(-1)| < |z-1|$. Geométricamente, ese conjunto representa el lugar geométrico de los puntos que están más cerca de -1 que de 1, que es el semiplano izquierdo abierto.

Algebraicamente, es el conjunto de los puntos para los que $|1+z|^2 < |1-z|^2$ o, equivalentemente,

$$1 + |z|^2 + 2\operatorname{Re} z < 1 + |z|^2 - 2\operatorname{Re} z.$$

Esto significa que $\operatorname{Re} z < 0$, lo cual viene a decir que z está el semiplano izquierdo abierto. ■

Ejercicio 7 *Definición. Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$. Decimos que f es una función univalente en Ω si es holomorfa en Ω y es inyectiva ahí.*

Sea $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, donde $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1$. Demuestre que f es una función univalente en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

SOLUCIÓN. (a) Para ver que f es holomorfa en $\mathbb{D}$, basta ver que su serie de potencias centrada en el origen tiene radio de convergencia, por lo menos, uno. La hipótesis $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1$ implica que $|a_n| \le 1/n$ para todo $n \ge 2$. Tomando las raíces n-ésimas, se sigue fácilmente de la fórmula de Cauchy-Hadamard

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \ge 1$$

así que f es holomorfa, por lo menos, en $\mathbb{D}$.

(b) Veamos ahora que f es inyectiva en $\mathbb{D}$. Para conseguirlo, demostraremos que si $f(z) = f(w)$, para z, $w \in \mathbb{D}$ entonces $z = w$. La hipótesis $f(z) = f(w)$ significa que

$$\begin{aligned} f(z) - f(w) &= z - w + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^n - w^n) \\ &= (z-w)\cdot\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} w + \dots w^{n-1})\right). \end{aligned}$$

Debido a nuestra hipótesis sobre los coeficientes a_n y teniendo en cuenta que $|z|$, $|w| < 1$, tenemos

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} w + \dots w^{n-1})\right| \le \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (|z|^{n-1} + |z|^{n-2}|w| + \dots |w|^{n-1}) < \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1.$$

La desigualdad de arriba es estricta ya que $a_n \ne 0$, así que la igualdad

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} w + \dots w^{n-1}) = 0$$

es imposible y, por tanto, $z = w$, lo cual prueba que f es inyectiva en $\mathbb{D}$. ■

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura

Entre 2015 y 2016