

Hoja 5: Límites y derivadas

1.- Sea f tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e.$$

Indicación: ver ejercicio 9-b de la hoja de problemas número 2.

2.- (*) Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 x}{x^4 + x^3} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2 \operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{3 \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^5 x} \\ \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2x^2} & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\lfloor x \rfloor}} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^4 + x^2 + 1)}{\log(x^{10} + x^7 + 100)} \\ \text{(g)} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^5 - 2x^4 + 3)^{\frac{-2}{(x-1)^3}} & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + x^{2x}}{2 + x^{3x}} \right)^{\frac{1}{x}} & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^5 - 2x^4 + 3)^{\frac{-2}{(x-1)^3}} \\ \text{(j)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{2x-1} & \text{(k)} \lim_{x \rightarrow 0^+} |\operatorname{sen} x|^{\frac{1}{\log x}} & \text{(l)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))} \end{array}$$

3.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones. Calcular la derivada en los puntos que exista.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x) = x^{\frac{1}{3}} & \text{(b)} f(x) = \arccos x & \text{(c)} f(x) = \frac{x^3}{|x|} \\ \text{(d)} f(x) = \log \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) & \text{(e)} f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{(f)} f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \\ \text{(g)} f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & & \end{array}$$

4.- Hallar el valor de los parámetros para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2, \\ a \cdot x + b & \text{si } x > 2. \end{cases} & f_2(x) = \begin{cases} a + b \cdot x^2 & \text{si } |x| \leq 2, \\ \frac{1}{|x|} & \text{si } |x| > 2. \end{cases} \\ f_3(x) = \begin{cases} a \cdot \cos x & \text{si } x \leq 0, \\ b - x^2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ c \cdot \arctan x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} & f_4(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) + a & \text{si } x \leq 0, \\ a + b \cdot x & \text{si } 0 < x < 2, \\ c \cdot e^{x^2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \end{array}$$

5.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} y = \log \frac{x-1}{x+1} & \text{(b)} y = \operatorname{sen}(\log x) & \text{(c)} y = \log(x^2 \log^3 x) \\ \text{(d)} y = x^{\tan(2\pi x)} & \text{(e)} y = \operatorname{arcsen} \sqrt{x^2 - 1} & \text{(f)} y = x^{\log x} \\ \text{(g)} y = \log_x e^x & \text{(h)} y = \tan(x^2 + \log x + \arctan x) & \text{(i)} y = \sec(\operatorname{cosec} x) \end{array}$$

6.- Probar que si $f(x)$ es derivable en $x = a$ y $f(a) \neq 0$ entonces $|f(x)|$ es derivable en $x = a$.

7.- (*) a) Sea f una función diferenciable par. Calcular $f'(0)$.

b) Sea f una función diferenciable. Demostrar que si f es par entonces f' es impar. Demostrar que si f es impar entonces f' es par.

c) Encontrar un contraejemplo que pruebe que aunque f' sea par esto no implica que f sea impar.

8.- (*) a) Sean f, g, h funciones tales que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

demostrar que si $g(0) = h(0)$ y además $g'(0) = h'(0) = 0$ entonces f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.

b) Encontrar un contraejemplo que demuestre que aunque además de lo anterior tengamos $g''(0) = h''(0) = 0$, es posible que $f''(0)$ no exista.

9.- (*) Demostrar que no existen funciones derivables f y g con $f(0) = g(0) = 0$ tales que para todo x se cumple $x = f(x)g(x)$. ¿Y si no se pide que sean derivables?

10.- (*) Sean I un intervalo abierto y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ un función derivable en cierto $a \in I$. Definimos $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Probar que $t(x)$ es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, es decir, demostrar:

$$(I) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0.$$

$$(II) \text{ Si } l(x) = m \cdot x + n \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - l(x)}{x - a} = 0, \text{ entonces } l(x) = t(x).$$

11.- Hallar el área del triángulo determinado por el eje X y las rectas tangente y normal a la gráfica de $f(x) = 9 - x^2$ en el punto $(2, 5)$.

12.- (*) Estudiar si existe algún valor de x para el que la tangente a $f(x) = x/(x + 1)$ sea paralela a la secante que conecta los puntos $(1, f(1))$ y $(3, f(3))$.

13.- (*) Sea $f(x) = x^2 - 2$ y sea x_0 un número racional mayor que $\sqrt{2}$. Calcular una fórmula para la intersección $(x_1, 0)$ de la tangente a $f(x)$ en x_0 con el eje X y probar que $\sqrt{2} < x_1 < x_0$. Comprobar con una calculadora que iteraciones sucesivas de esta fórmula llevan rápidamente a una aproximación de $\sqrt{2}$ mediante fracciones y explicar esta aproximación geoméricamente.

14.- ¿Cuántas derivadas sucesivas existen para la función $f(x) = |x|^3$? Calcularlas. Hacer lo mismo con $g(x) = x|x|$.

15.- Sea $f(x) = \sin(2x)$. Calcular $f^{(2010)}(x)$ (derivada de orden 2010).