

Hoja 4: Límites y continuidad de funciones

1.- Utilizando la formulación en términos de ε y δ demostrar:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{3+x} = \frac{1}{2}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x|} = 0, \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

2.- Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

$$\begin{array}{lll} (a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} & (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3 + \operatorname{sen} x)}{(x + \operatorname{sen} x)^2} \\ (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x} & (e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - x + 1}{\sqrt{x} + x - 1} & (f) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+4}}{x^2 + 4x + 3} \\ (g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x}{x} & (h) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4} & (i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} \\ (j) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & (k) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} & (l) \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x^2} \end{array}$$

Indicación: En el caso (k), puede ser útil recordar que $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$.

3.- (*) Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Utilizar esta propiedad para calcular

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan x)}{x}$$

4.- En las siguientes expresiones, aparece la función *parte entera*, denotada por $[x]$, y que representa al mayor número entero que es menor o igual que x . Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

$$\begin{array}{ll} (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4} \left[\frac{3}{x} \right] & (b) \lim_{x \rightarrow 1} x \left[\frac{3}{x} \right] \\ (c) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \right)^{[x]} & (d) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} \right|^3 + x^6 - 1 \right)^{[x]} \end{array}$$

5.- Encontrar las constantes a y b para las cuales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - ax - b) = 1.$$

6.- Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

- (a) Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$, entonces existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
- (b) Si no existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, entonces no existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$.
- (c) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|$.
- (d) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \neq c$, entonces, en caso de existir ambos límites,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

- (e) Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq c$, entonces, en caso de existir ambos límites,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) < \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

7.- Sea $f(x)$ tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, y sea $g(x)$ tal que $|g(x)| < K$ para todo x . Demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$. Estudiar si se puede debilitar de alguna manera la hipótesis sobre g .

8.- Dibujar la gráfica y estudiar la continuidad de las siguientes funciones donde $[x]$ denota la parte entera de x , es decir, el mayor entero menor o igual que x :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x) = [x] & \text{(b)} f(x) = x - [x] & \text{(c)} f(x) = \sqrt{x - [x]} \\ \text{(d)} f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]} & \text{(e)} f(x) = \left[\frac{1}{x} \right] & \text{(f)} f(x) = \frac{1}{\left[\frac{1}{x} \right]} \end{array}$$

9.- Estudiar los puntos de discontinuidad y establecer en su caso el tipo de la misma para las siguientes funciones:

$$\begin{array}{llll} f_1(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & f_2(x) = \frac{b}{x - b}, & f_3(x) = x \left[\frac{1}{x} \right], & f_4(x) = [\sin x]. \\ f_5(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [a - 1, a), \\ x + a & \text{si } x \in [a, a + 1]. \end{cases} & f_6(x) = \begin{cases} -|\sin x| - 4 & \text{si } x < \pi, \\ |\cos x| - 5 & \text{si } x \geq \pi. \end{cases} \end{array}$$

10.- Se consideran las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$, $h(x) = \cos x$.

a) Escribir la expresión analítica de las funciones $f \circ g$, $f \circ h + h \circ g$, $f \circ g \circ h$.

b) Escribir en términos de operaciones con las funciones f, g, h , las expresiones siguientes: $y = e^{\cos x}$, $y = \cos(e^x + e^{x^2})$, $y = e^{2x}$.

11.- (*) Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

- (a) Si una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} alcanza un máximo y un mínimo en todo intervalo cerrado entonces es continua.
- (b) Si una función f de \mathbb{R} en \mathbb{R} toma **todos** los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ en todo intervalo $[a, b]$ entonces es continua.
- (c) Si f es una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} continua en 0 y tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, entonces f es continua en \mathbb{R} .

12.- Dar un ejemplo de función definida sobre todos los reales que sólo sea continua en los puntos 0 y 1.

13.- Supóngase que f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún x en (a, b) .

14.- (*) Supóngase que f es una función continua en $[0, 1]$ y que $f(x)$ está en $[0, 1]$ para todo x . Demostrar que $f(x) = x$ para algún x en $[0, 1]$.

15.- Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen solución:

$$\text{(a)} \quad x - \sin x - 5 = 0, \quad \text{(b)(*)} \quad x^7 + \frac{213}{2 + x^2 + \tan^2 x} = 12, \quad \text{(c)(*)} \quad \frac{x}{4} = x - [x].$$

16.- a) Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

b) (*) Demostrar que $f(x)$ satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios en el intervalo $[-1, 1]$.

17.- (**) Demostrar que no existe ninguna función continua de \mathbb{R} en \mathbb{R} que tome exactamente dos veces cada valor.