Cálculo II.
1º de Grado en Matemáticas y Doble Grado Informática-Matemáticas. Curso 2013-14.
Departamento de Matemáticas

Hoja 8

Curvas. Integrales de línea. Fórmula de Green

1.- Hallar el vector tangente (normalizado) a la trayectoria $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ en el punto $(1, -1)$. Escribir la ecuación de la recta tangente correspondiente. ¿Existe la recta tangente en el punto $(0, 0)$?

2.- Para las siguientes trayectorias, hallar la velocidad, la rapidez (es decir, la longitud del vector velocidad), la aceleración y la ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente al valor de t dado:

(a) $\gamma(t) = \big(e^{-t} \operatorname{sen} t, e^{-t} \cos t\big), \quad t = 2\pi.$ $\qquad$ (b) $\sigma(t) = \big(e^{-2t} \operatorname{sen}(2t), e^{-2t} \cos(2t), e^{-2t}\big), \quad t = \dfrac{\pi}{2}.$

3.- Hallar la longitud de la curva en el intervalo indicado:

(a) $\sigma(s) = (s, 4s, s^2)$, $0 \leq s \leq 4$.

(b) $\sigma(u) = \big(e^{-u} \cos u, e^{-u} \operatorname{sen} u\big)$, $0 \leq u < +\infty$.

4.- Dibujar el arco de cicloide descrito por $x = R(t - \operatorname{sen} t)$, $y = R(1 - \cos t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$ y hallar su longitud.

5.- Hallar la longitud del arco de hipocicloide descrito por $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \operatorname{sen}^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

6.- Calcular la longitud de la curva:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \big(\cos t, \operatorname{sen} t, 3t\big) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi, \\ \big(-1, -t + \pi, 3t\big) & \text{si} \quad \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

7.- Dada la curva γ mediante las ecuaciones paramétricas $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, calcúlese la integral $\displaystyle\int_\gamma z\, ds$;

8.- Dibujar la curva descrita por la trayectoria σ dada por $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$, y hallar la integral $\displaystyle\int_\sigma f\, ds$, donde $f(x, y, z) = x + y + z$.

9.- Hallar la integral $\displaystyle\int_\Gamma F(x, y)\, ds$ del campo vectorial F a lo largo de la curva orientada Γ que se indica. Dibujar en cada caso el camino de integración.

(a) $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, a lo largo de la curva $y = 1 - |1 - x|$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 0)$.

(b) $F(x, y) = (x + y, x - y)$, siendo Γ la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ recorrida en el sentido contrario al de las manillas del reloj.

10.- Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sea $F(x, y)$ el vector unitario que apunta desde (x, y) hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo que realiza el campo F para desplazar una partícula desde la posición $(2a, 0)$ hasta $(0, 0)$ a lo largo de la semicircunferencia superior de $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

11.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma y\, dx + x^2\, dy$, cuando Γ es:

(a) la circunferencia $x^2 + y^2 = a\,x$; $\qquad$ (b) la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

recorridas en el sentido positivo (el de la medida de los ángulos).

12.- Hallar el trabajo que realiza el campo $F(x, y) = (y^2 + x^3, x^4)$ al recorrer el contorno del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en el sentido negativo.

13.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma (x^4-x^3e^x-y)\,dx+(x-y\arctan y)\,dy$, donde Γ viene dado como sigue: dados los puntos $A=(2,0)$, $B=(1,-1)$ y $C=(0,-1)$ de $\mathbb{R}^2$, Γ es el camino formado por el arco AB de la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1, y los segmentos orientados BC, CO, OA (O es el origen de coordenadas).

14.- Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $F(x,y)$ definidos en $\mathbb{R}^2$, determinar si son gradientes de algún potencial $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. En caso afirmativo, calcular el potencial f.

(a) $F(x,y)=(3\,x^2y, x^3)$ (b) $F(x,y)=(\operatorname{sen} y-y\,\operatorname{sen} x+x, \cos x+x\,\cos y+y)$

(c) $F(x,y)=(2\,x\,e^y+y, x^2\,e^y+x-2\,y)$ (d) $F(x,y)=(\operatorname{sen} x\,y+x\,y\,\cos x\,y, x^2\cos x\,y)$.

15.- Evaluar $\displaystyle\int_\Gamma (2\,x^3-y^3)\,dx+(x^3+y^3)\,dy$, donde Γ es el círculo unidad orientado en el sentido negativo.

16.- Verificar el teorema de Green para el campo (P,Q) con $P(x,y)=2\,x^3-y^3$ y $Q(x,y)=x^3+y^3$ y la región anular (corona) $a^2\le x^2+y^2\le 4\,a^2$.

17.- Sea A el área del recinto acotado por una curva γ de clase C^1, simple y cerrada en el plano y orientada en el sentido positivo. Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_\gamma x\,dy-4y\,dx$ en función de A.