Cálculo II.
1º de Grado en Matemáticas y Doble Grado Informática-Matemáticas. Curso 2013-14.
Departamento de Matemáticas

Hoja 6

Integrales dobles y triples. Teorema de Fubini

1.- Sea f la función definida para $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Demostrar que f no es integrable en el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

(b) Estudiar la existencia de las integrales iteradas

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\, dx \Big) dy \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\, dy \Big) dx\, .$$

2.- Definimos $f(x, y)$ en el cuadrado $C = [0, 1] \times [0, 1]$ como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 2y & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Probar que la integral iterada $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx$ existe y es igual a 1.

(b) Demostrar que, no obstante, f no es integrable en C.

3.- Demostrar la existencia de la integral $\displaystyle\iint_Q f(x + y)\, dx\, dy$, donde $Q = [0, 2] \times [0, 2]$ y $f(t) = [t]$ representa el mayor número entero $\leq t$. Hallar el valor de la integral.

4.- Hallar el valor de las siguientes integrales sobre los rectángulos indicados. Explicar, en cada caso, la existencia de la integral.

(a) $\displaystyle\iint_Q x^2 e^y\, dx\, dy,\ Q = [-1, 1] \times [0, \log 2]$;

(b) $\displaystyle\iint_Q \operatorname{sen}(x + y)\, dx\, dy,\ Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$;

(c) $\displaystyle\iint_Q |xy|\, dx\, dy,\ Q = [-1, 2] \times [1, 3]$;

(d) $\displaystyle\iint_Q \operatorname{sen}^2(3x - 2y)\, dx\, dy,\ Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

5.- Para cada una de las siguientes funciones f definidas en el rectángulo $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, se pide representar el conjunto de los valores $f(x, y)$ sobre Q y calcular el volumen del sólido así obtenido. Determinar también el conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in Q :\ f \text{ no es continua en } (x, y)\}$$

y explicar la existencia de las integrales utilizadas.

(a) $f(x, y) = \begin{cases} 1 - (x + y) & \text{si} \quad x + y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

(b) $f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si} \quad x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$

6.- Dibujar la región de integración, estudiar la existencia de la integral y calcular su valor:

$$\iint_\Omega x\, \cos(x + y)\, dx\, dy\, ,$$

siendo Ω el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ y (π, π).

7.- Calcular $\iint_D y\,dx\,dy$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ 2x/\pi \leq y \leq \operatorname{sen} x\}$.

8.- Calcular la integral $\iint_D x^3 y \operatorname{sen} \dfrac{\pi y^2}{x} dxdy$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

9.- Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x+2y+3z=6$. Dibujar esta pirámide y luego calcular su volumen: a) de manera elemental; b) integrando.

10.- (a) Hallar el volumen de la región encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.

(b) Lo mismo para la región acotada por la gráfica $z = e^{-x^2}$ y los planos $y = 0$, $y = x$ y $x = 1$.

11.- En los siguientes apartados, se supone que la integral de una función positiva f sobre la región Ω se reduce a la integral iterada que se da. En cada caso, se pide determinar y dibujar la región Ω e invertir el orden de integración.

(a) $\displaystyle\int_0^2 \Big(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx\Big)dy.$ (b) $\displaystyle\int_1^4 \Big(\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy\Big)dx\,,$

(c) $\displaystyle\int_1^e \Big(\int_0^{\log x} f(x,y)\,dy\Big)dx.$ (d) $\displaystyle\int_0^\pi \Big(\int_{-\operatorname{sen} x/2}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy\Big)dx.$

12.- Invirtiendo el orden de integración si fuese necesario, calcúlese la integral

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2}\,dxdy\,.$$

13.- Observando que $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[a,b]} f(x)f(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$, demostrar que

$$2\int_a^b \int_x^b f(x)f(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 .$$

14.- Si $D = [-1,1] \times [-1,2]$, probar que

$$1 \leq \iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1} \leq 6\,.$$

15.- Hallar el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración.

(a) $\iiint_Q (2x+3y+z)\,dx\,dy\,dz$, con $Q = [1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$.

(b) $\iiint_T x^2 \cos z\,dx\,dy\,dz$, siendo T la región limitada por los planos $z = 0, z = \pi, y = 0, y = 1, x = 0, x + y = 1$.

(c) $\iiint_\Omega x\,y^2\,z^3\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $z = x\,y$ y los planos $y = x, x = 1$ y $z = 0$.

16.- En cada uno de los siguientes casos, la integral $\int\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ de la función f se reduce a la integral iterada dada. Dibujar la región de integración $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z = 0$. Escribir entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que integración se hace en el orden $dz\,dx\,dy$.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^x \Big(\int_0^y f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} \Big(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^1 \Big(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)dx.$