CÁLCULO 1 Curso 2013-2014.

1^0 del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Hoja 1: Fundamentos

1.- Indicar en la recta real todos los valores de x que satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $|x+1|>3$,

(2) $|2x+1|<1$,

(3) $|x-1|\leq|x+1|$,

(4) $x^2-4x+6<x$,

(5) $|x^2-3|\leq 1$,

(6) $\frac{x^2}{x^2-4}<0$,

(7) $\frac{x-1}{x+2}>0$,

(8) $|(x-2)(x-3)|<1$,

(9) $|x-1|+|x-2|>1$,

(10) $\frac{|x+1|}{|x-1|}\geq 1$.

2.- Demostrar por inducción:

(1) $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(2) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(3) $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

(4) $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.

(5) $\forall\, n\geq 10,\ 2^n\geq n^3$.

(6) $x^{2n}-y^{2n}$ es divisible por $x+y$.

(7) El número de rectas determinado por $n\geq 2$ puntos, de los cuales ningún trío pertenece a la misma recta, es $\frac{1}{2}n(n-1)$.

(8) $4(1+5+5^2+\cdots+5^n)+1=5^{n+1}$.

(9) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$.

(10) Si n no es múltiplo de 4 la suma $1^n+2^n+3^n+4^n$ es múltiplo de 10. (Comprobarlo para $n=1,2,3$ y demostrar que si es cierto para n, lo es para $n+4$.)

(11) $n(n^2+5)$ es divisible por 6.

(12) $1+1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+(n-1)\,(n-1)!=n!$ para $n\geq 2$.

3.- Sea $\mathcal{P}(n)=\{n^2+5n+1$ es un número par$\}$.
a) Demostrar que si $\mathcal{P}(n)$ es cierto, entonces $\mathcal{P}(n+1)$ también lo es.
b) Demostrar que $\mathcal{P}(n)$ es siempre falso.

4.- Demostrar que para todo número natural n y a y b cualesquiera se cumple

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k},$$

donde

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!},\ \text{y } 0!=1.$$

Indicación. Demostrar primero que $\binom{i}{k-1}+\binom{i}{k}=\binom{i+1}{k}$.

5.- Demostrar por inducción sobre n que

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \text{si } r \neq 1.$$

6.- Demostrar la desigualdad de Bernoulli

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad \text{para } x \geq -1.$$

7.- Sean a, b dos números no negativos, con $a \leq b$. Demostrar que

$$a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} \leq b.$$

8.- Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

(1) $A = \{x : x^2 < 4\}$,

(2) $B = \{x : x^2 \geq 4\}$,

(3) $C = \{x : 2 < x^2 \leq 4\}$,

(4) $D = \{\frac{n-1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$,

(5) $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

(6) $F = E \cup \{0\}$,

(7) $G = \{\frac{1}{n} - (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$,

(8) $H = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 \leq 3\}$.

9.- Si el conjunto A tiene supremo, ¿qué podemos decir sobre $-A = \{-x : x \in A\}$?

10.- Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que existen $\sup A$, $\inf B$, y que además, $\sup A \leq \inf B$. Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

11.- Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente, y sea $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$. Demostrar que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Indicación. Para demostrar que $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$ basta ver que $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Elegir a en A y b en B tales que $\sup A - a < \varepsilon/2$ y $\sup B - b < \varepsilon/2$.

12.- Donde está el fallo en los siguientes razonamientos:

(a) Sea $x = y$, entonces $x^2 = x\,y$ y $x^2 - y^2 = x\,y - y^2$. Así, $(x + y)\,(x - y) = y\,(x - y)$, es decir, $x + y = y$. De aquí se sigue que $2y = y$ y por lo tanto $2 = 1$. **Contradicción!!!**

(b) Vamos a hallar los x que verifican

$$\frac{x + 1}{x - 1} \geq 1.$$

Esta desigualdad es equivalente a $x + 1 \geq x - 1$, o lo que es lo mismo $1 \geq -1$. Como esto es cierto para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que el conjunto de valores que verifican la desigualdad anterior es $\mathbb{R}$. De esta forma, tomando en particular $x = -1$ obtenemos

$$0 = \frac{-1 + 1}{-1 - 1} \geq 1. \qquad \textbf{Contradicción!!!}$$