

Hoja 2: Sucesiones

1.- Estudiar el límite de las siguientes sucesiones

- (a)  $\left\{ \frac{n^2}{n+2} \right\}$       (b)  $\left\{ \frac{n^3}{n^3+2n+1} \right\}$       (c)  $\left\{ \frac{n}{n^2-n-4} \right\}$   
(d)  $\left\{ \frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2} \right\}$       (e)  $\left\{ \frac{\sqrt{n^3+2n+n}}{n^2+2} \right\}$       (f)  $\left\{ \frac{\sqrt{n+1+n^2}}{\sqrt{n+2}} \right\}$   
(g)  $\left\{ \frac{(-1)^n n^2}{n^2+2} \right\}$       (h)  $\left\{ \frac{n+(-1)^n}{n} \right\}$       (i)  $\left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$   
(j)  $\left\{ \left(\frac{5}{3}\right)^n \right\}$       (k)  $\left\{ \frac{2^n}{4^{n+1}} \right\}$       (l)  $\left\{ \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} \right\}$   
(m)  $\left\{ \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \right\}$       (n)  $\left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right\}$       (ñ)  $\left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right\}$

2.-

(a) Utilizar la igualdad  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  para simplificar la expresión  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ .

(b) Como aplicación calcular el límite de la sucesión

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

3.- Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n} \right).$$

4.- Sea  $a > 1$ . Se define por recurrencia la sucesión  $\{a_n\}$  por la relación  $a_n = \sqrt{a \cdot a_{n-1}}$ ,  $a_1 = \sqrt{a}$ . Probar que la sucesión es monótona creciente y acotada. Hallar su límite.

5.- Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de números reales definida por  $a_1$  un número mayor que  $-\frac{3}{2}$  y  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ . Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite. Indicación: distinguir el caso  $a_1 \geq 3$  y  $a_1 < 3$ .

6.- Sea  $a_1 = 1$ . Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

(a)  $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ ,      (b)  $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n$ ,      (c)  $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$ ,      (d)  $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n$ .

Probar que cada una de ellas es acotada y monótona. Hallar el límite.

7.- Se define recurrentemente la sucesión  $a_1 = a > 0$  y  $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$ . ¿Es convergente la sucesión?

**8.-** Interpretar las expresiones siguientes como el límite de una sucesión definida de forma recurrente:

$$(a) \quad \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} \qquad (b) \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}, \qquad (c) \quad 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}.$$

Probar que esos límites existen y calcular su valor numérico.

**9.-** Demostrar que si  $a_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$$

**10.-** Calcular, si existen, los límites de las sucesiones que tienen como término general

$$a_n = \left(\frac{n^2 + 1}{n^2}\right)^{2n^2 - 3}, \quad b_n = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{2n^2 + 3}, \quad c_n = a_n + \frac{1}{b_n}.$$

**11.-**

(a) Probar por inducción que para  $n = 1, 2, \dots$  se tienen las desigualdades

$$2^{n-1}n! \leq n^n \leq e^{n-1}n!$$

(b) Como aplicación probar las siguientes afirmaciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty.$$

**12.-** Hallar los siguientes límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 1)^{\frac{1}{3n}} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} \right).$$

**13.-** Demostrar que si  $A \subset \mathbb{R}$  está acotado superiormente, existe una sucesión  $\{a_n\}$  con  $a_n \in A$  y tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A$ .

**14.-** La sucesión de término general  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  cumple que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que  $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$  para  $n > n_0$ . Demostrar que, sin embargo, la sucesión no es de Cauchy.