

Hoja 1: Fundamentos

1.- Indicar en la recta real todos los valores de  $x$  que satisfacen las siguientes condiciones:

- (1)  $|x + 1| > 3$ , (6)  $\frac{x^2}{x^2-4} < 0$ ,  
(2)  $|2x + 1| < 1$ , (7)  $\frac{x-1}{x+2} > 0$ ,  
(3)  $|x - 1| \leq |x + 1|$ , (8)  $|(x - 2)(x - 3)| < 1$ ,  
(4)  $x^2 - 4x + 6 < x$ , (9)  $|x - 1| + |x - 2| > 1$ ,  
(5)  $|x^2 - 3| \leq 1$ , (10)  $\frac{|x+1|}{|x-1|} \geq 1$ .

2.- Demostrar por inducción:

- (1)  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . (4)  $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .  
(2)  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . (5)  $\forall n \geq 10, 2^n \geq n^3$ .  
(3)  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$ . (6)  $x^{2n} - y^{2n}$  es divisible por  $x + y$ .  
(7) El número de rectas determinado por  $n \geq 2$  puntos, de los cuales ningún trío pertenece a la misma recta, es  $\frac{1}{2}n(n - 1)$ .  
(8)  $4(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n) + 1 = 5^{n+1}$ .  
(9)  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$ .  
(10) Si  $n$  no es múltiplo de 4 la suma  $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$  es múltiplo de 10. (Comprobarlo para  $n = 1, 2, 3$  y demostrar que si es cierto para  $n$ , lo es para  $n + 4$ ).  
(11)  $n(n^2 + 5)$  es divisible por 6.  
(12)  $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + (n - 1)(n - 1)! = n!$  para  $n \geq 2$ .

3.- Demostrar que para todo número natural  $n$  y  $a$  y  $b$  cualesquiera se cumple

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}, \text{ y } 0! = 1.$$

**Indicación.** Demostrar primero que  $\binom{i}{k-1} + \binom{i}{k} = \binom{i+1}{k}$ .

4.- Demostrar por inducción sobre  $n$  que

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \text{si } r \neq 1.$$

5.- Demostrar la desigualdad de Bernoulli

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad \text{para } x \geq -1.$$

6.- Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

(1)  $A = \{x : x^2 < 4\}$ ,

(5)  $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ,

(2)  $B = \{x : x^2 \geq 4\}$ ,

(6)  $F = E \cup \{0\}$ ,

(3)  $C = \{x : x^2 \leq 4\}$ ,

(7)  $G = \{\frac{1}{n} - (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ ,

(4)  $D = \{x : 2 < x^2 \leq 4\}$ ,

(8)  $H = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 \leq 3\}$ .

7.- Si el conjunto  $A$  tiene supremo, ¿qué podemos decir sobre  $-A = \{-x : x \in A\}$ ?

8.- Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que  $a < b$  para todo  $a \in A$  y  $b \in B$ . Demostrar que existen  $\sup A$ ,  $\inf B$ , y que además,  $\sup A \leq \inf B$ . Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

9.- Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}$  acotados superiormente, y sea  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ . Demostrar que  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ .

**Indicación.** Para demostrar que  $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$  basta ver que  $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B) + \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Elegir  $a$  en  $A$  y  $b$  en  $B$  tales que  $\sup A - a < \varepsilon/2$  y  $\sup B - b < \varepsilon/2$ .

10.- Donde está el fallo en los siguientes razonamientos:

(a) Sea  $x = y$ , entonces  $x^2 = xy$  y  $x^2 - y^2 = xy - y^2$ . Así,  $(x + y)(x - y) = y(x - y)$ , es decir,  $x + y = y$ . De aquí se sigue que  $2y = y$  y por lo tanto  $2 = 1$ . **Contradicción!!!**

(b) Vamos a hallar los  $x$  que verifican

$$\frac{x + 1}{x - 1} \geq 1.$$

Esta desigualdad es equivalente a  $x + 1 \geq x - 1$ , o lo que es lo mismo  $1 \geq -1$ . Como esto es cierto para todo  $x \in \mathbb{R}$ , se sigue que el conjunto de valores que verifican la desigualdad anterior es  $\mathbb{R}$ . De esta forma, tomando en particular  $x = -1$  obtenemos

$$0 = \frac{-1 + 1}{-1 - 1} \geq 1. \quad \text{Contradicción!!!}$$