

Hoja 5

Derivadas de orden superior. Polinomios de Taylor. Máximos y mínimos

1.- Definamos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar la existencia de las siguientes derivadas parciales y, en su caso, calcular sus valores:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0).$$

2.- Sea

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Compruébese que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$. ¿Qué se puede decir acerca de la continuidad de las derivadas de orden segundo $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en el origen?

3.- El cambio de variable $x = u + v$, $y = u - v$ transforma $f(x, y)$ en $g(u, v)$. Calcular el valor de $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ en el punto en el que $u = 1$, $v = 1$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

en dicho punto.

4.- Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0, 0)$ de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x, y) = x e^{x+y}. \quad (b) \quad f(x, y) = \sin x y + \cos x y. \quad (c) \quad f(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

5.- Comprobar que la función $f(x, y) = e^y \cos x$ no tiene puntos críticos en \mathbb{R}^2 .

6.- Hallar los puntos críticos y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla:

$$\begin{array}{ll} (a) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy. & (b) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - 4y + 10. \\ (c) \quad f(x, y) = xy. & (d) \quad f(x, y) = 3x^2 - 4y^2 + xy. \\ (e) \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy. & (f) \quad f(x, y) = 3 - x^2 - y^2 - x^4 y^2. \\ (g) \quad f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2). & (h) \quad f(x, y) = xy e^{x-y}. \\ (i) \quad f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. & (j) \quad f(x, y) = e^{xy} + x^2. \end{array}$$

7.- Hallar los posibles puntos de máximo, mínimo y de silla de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x, y) = (x + y)^2. \quad (b) \quad f(x, y) = \ln(2 + \sin x y).$$

8.- Comprobar que la función $f(x, y) = x^2 y^2$ tiene un mínimo absoluto en todos los puntos de los ejes x e y y que, sin embargo, el criterio de la matriz Hessiana para los extremos locales no nos proporciona ninguna información en este caso.

9.- Considérese el polinomio $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ y la función $g(t) = f(t, ct)$ de $t \in \mathbb{R}$. Demuéstrese que $(0, 0)$ es un punto crítico degenerado para f y que aunque g tiene un mínimo en $t = 0$, el punto $(0, 0)$ no es un mínimo local de f .

10.- (a) Demostrar que, para dos números no negativos arbitrarios, a y b , se cumple la desigualdad

$$\frac{a + b + 1}{3} \geq \sqrt[3]{ab}$$

y que la igualdad es posible si y sólo si $a = b = 1$.

(b) Deducir del apartado anterior que las medias aritmética y geométrica de tres números no negativos x , y y z satisfacen la desigualdad

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si $x = y = z$.

11.- Escribir un número dado $a > 0$ como producto de cuatro factores positivos, cuya suma sea mínima.

12.- Calcular las distancias máxima y mínima del origen a la elipse dada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 9$.

13.- Encontrar los valores máximo y mínimo (absolutos) de $f(x, y) = x^3 + 3xy^2$ en la región

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\}.$$

14.- Hallar los extremos de la función $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$ bajo la restricción $x^2 + y^2 \leq 2$.

15.- (a) Explicar por qué el conjunto $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 25\}$ es compacto.

(b) Hallar razonadamente los extremos de la función $f(x, y) = x^4 + x^2 + 2y^2$ en K .

16.- Hallar los máximos y mínimos de la función

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + (x - 2)^2 + y^2}$$

en el conjunto $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$. ¿Por qué se alcanzan?

17.- Para la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x^4 + y^4 + a(2x^2 + y^2)$, se pide:

(a) Hallar sus máximos y mínimos relativos (locales) según los distintos valores del parámetro a .

(b) Hallar los valores máximo y mínimo de la función sobre el recinto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ en los casos $a = -1$ y $a = 5$.

18.- Queremos construir una caja de carton con volumen fijo V_0 . Hallar las dimensiones que minimizan la cantidad de cartón utilizada. ¿Que tipo de caja obtenemos?

19.- Se quiere construir una lata metálica con forma cilíndrica, sin la tapa superior y con una capacidad de 1 litro. ¿Cuales son las dimensiones que minimizan la cantidad de metal empleada?

20.- Se dispone de 12 decímetros cuadrados de metal para fabricar una lata cilíndrica con las dos tapas. ¿Qué dimensiones maximizan el volumen de dicha lata?