

## Hoja 3

## Derivadas parciales y funciones diferenciables

1.- Hallar todas las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones escalares.

(a)  $f(x, y) = e^{\operatorname{sen}(xy^2)} - \ln^2 x$ , definida para los  $(x, y)$  tales que  $x > 0$ .

(b)  $f(x, y, z) = x^2 y e^z - y^2 \operatorname{sen}(xz)$ , definida en  $\mathbb{R}^3$ .

(c)  $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , definida en los puntos  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(d)  $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x-y}{1+xy}$ , definida para los  $(x, y)$  tales que  $xy \neq -1$ .

2.- Determinar los puntos en los que existen las derivadas parciales de primer orden de la función  $f(x, y) = |x|y^2$  y calcular dichas derivadas.

3.- Demuéstrese que la función definida mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0, \end{cases}$$

tiene derivadas parciales en el origen pero no es continua en ese punto.

4.- Considérese la función definida en los  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mediante

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{si } x \neq 0, \quad f(0, y) = 0.$$

(a) Demostrar que las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existen y calcular su valor.

(b) ¿Es  $f(x, y)$  continua en  $(0, 0)$ ?

(c) ¿Es  $f(x, y)$  diferenciable en  $(0, 0)$ ?

(d) Hallar la derivada direccional  $D_{(u,v)}f(0, 0)$  para cada dirección  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

5.- Demuéstrese que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

es continua en todo el plano y tiene derivadas parciales en  $(0, 0)$ , pero no es diferenciable en el origen.

6.- Demuéstrese que la función definida mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0, \end{cases}$$

tiene derivadas parciales continuas en todo punto  $(x, y) \neq (0, 0)$  que no son continuas en el punto  $(0, 0)$  y que, sin embargo,  $f(x, y)$  es diferenciable en  $(0, 0)$ .

7.- Demostrar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

es diferenciable en cualquier punto del plano  $\mathbb{R}^2$ .

8.- Estúdiense la diferenciabilidad en el origen de la función

(a)  $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$ ;

(b)  $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^2}$ .

9.- Hallar la matriz de  $Df(a)$  en cada uno de los siguientes casos:

(a)  $f(x, y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)$ ,  $a = (1, 2)$ .

(b)  $f(x, y) = (\text{sen}(x + y), \text{cos}(x - y))$ ,  $a = (\pi, -\pi/4)$ .

(c)  $f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$ ,  $a = (0, \pi/2, -1)$ .

(d)  $f(x) = (e^x \text{sen } x, e^x \text{cos } x, x^2)$ ,  $a = \pi/6$ .

(e)  $f(x, y, z, t) = (\sqrt{y^2 + z^2}, \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + y^2 + z^2 - 9t^2)$ ,  $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3)$ .

10.- Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones escalares dadas por  $g(x) = \|x\|^4$  y  $f(x) = \langle a, x \rangle$ , siendo  $a \in \mathbb{R}^n$  un vector fijo.

(a) Hallar las derivadas direccionales  $D_v f(x)$  y  $D_v g(x)$  para cada  $x, v \in \mathbb{R}^n$ .

(b) Tomando  $n = 2$ , hallar todas las direcciones  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  tales que  $D_{(u,v)} g(2, 3) = 6$ .

(c) Tomando  $n = 3$ , hallar todas las direcciones  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$  tales que  $D_{(u,v,w)} g(1, 2, 3) = 0$ .

11.- Sea  $f(r, t) = t^n e^{-\frac{r}{4t}}$ , definida en los  $r \geq 0$  y  $t > 0$ . Hallar un valor de la constante  $n$  tal que  $f(r, t)$  satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (r, t > 0).$$

12.- Hallar el vector gradiente, en cada punto en el que exista, de las siguientes funciones escalares

(a)  $f(x, y) = e^{-y} \cos x$ .

(b)  $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .

(c)  $f(x, y) = xy \text{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  y  $f(0, 0) = 0$ .

13.- (a) Estudiar la existencia de las derivadas parciales de  $f(x, y) = \sqrt{3x^2 + 5y^2}$  en el origen.

(b) Comprobar que  $f$  es diferenciable en todos los demás puntos del plano.

(c) Calcular el vector  $\nabla f(2, 1)$ .

14.- Hallar los puntos  $(x, y)$  y las direcciones  $\mathbf{v} = (u, v)$  unitarias en los cuales la derivada direccional  $D_{\mathbf{v}} f(x, y)$  de la función  $f(x, y) = 3x^2 + y^2$  tiene un máximo, sabiendo que  $(x, y)$  está en la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ .

15.- Hallar los valores de  $a, b, c$  tales que la derivada direccional de

$$f(x, y, z) = ax^2 + byz + cx^3z^2$$

en el punto  $(1, 2, -1)$  tenga un valor máximo de 64 en la dirección paralela al eje  $Z$ .

16.- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en el punto  $a \in \mathbb{R}^2$ . Supongamos que  $D_{\mathbf{u}} f(a) = 1/\sqrt{13}$  y  $D_{\mathbf{v}} f(a) = \sqrt{2}$ , siendo  $\mathbf{u} = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$  y  $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

(a) Calcular el gradiente  $\nabla f(a)$ .

(b) Hallar las dos direcciones unitarias  $\mathbf{w}$  para las cuales  $D_{\mathbf{w}} f(a) = 0$ .

17.- Hallar la derivada de  $f(x, y) = x^2 - 3xy$  a lo largo de la parábola  $y = x^2 - x + 2$  en el punto  $(1, 2)$ .