

## Hoja 1

Introducción al espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ 

- 1.- Demostrar que para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}^n$  se cumple
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ .
  - $\|x - y\| \cdot \|x + y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$ .
  - $\langle x, y \rangle = 0$  si y sólo si  $\|x + y\| = \|x - y\|$ .
  - $\langle x, y \rangle = 0$  si y sólo si  $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  - $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ .
- 2.- (a) Determinar todos los valores posibles del parámetro real  $\lambda$  para que los vectores  $\lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  y  $\lambda\mathbf{i} + \mathbf{j} - \lambda\mathbf{k}$  (en  $\mathbb{R}^3$ ) sean ortogonales.
- (b) Hallar todos los valores de  $a$  y  $b$  para los que los vectores  $\mathbf{x} = (4, b, 1)$  e  $\mathbf{y} = (a, b, 0)$  sean ortogonales en  $\mathbb{R}^3$ . ¿Cuál es el lugar geométrico, en el plano  $ab$ , determinado por tales  $a$  y  $b$ ?
- (c) Hallar dos vectores ortogonales a  $(1, 1, 1)$  que no sean paralelos entre sí. ¿Se pueden elegir dos que sean también mutuamente ortogonales?
- 3.- (a) Sean  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ . Determinar el ángulo entre los vectores  $u = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$  y  $v = \sqrt{5}/3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .
- (b) Lo mismo para el ángulo entre los vectores  $(1, -1, 0)$  y  $(0, 1, -1)$ .
- (c) Explicar la diferencia entre los valores  $\|3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\| \cdot \|2\mathbf{j} + \mathbf{k}\|$  y  $|(3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} + \mathbf{k})|$ . ¿Puede decidirse que ambos valores son diferentes, sin necesidad de calcularlos explícitamente?
- 4.- Calcúlese el coseno del ángulo entre una diagonal de un cubo y una diagonal de una de sus caras.
- 5.- Comprobar que las siguientes funciones tienen todas las propiedades que se requieren de una métrica en  $\mathbb{R}^n$ :

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|, \quad d_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|.$$

- 6.- Sea  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  y cóncava con  $f(0) \geq 0$ .
- Demuestre que  $f(tx) \geq tf(x)$  para todos  $x \geq 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ;
  - Use lo anterior para demostrar que  $f$  es subaditiva, es decir,  $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$ .
  - Deduzca que las funciones  $d(x, y) = \arctg \|x - y\|$  y  $\delta(x, y) = \frac{\|x - y\|}{1 + \|x - y\|}$  definen sendas métricas en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ .

- 7.- Hallar, si existe, el límite de la sucesión  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  en  $\mathbb{R}^2$  cuando

$$x_k = \left( \frac{\ln k}{k}, k^{1/k} \right), \quad x_k = \left( \sqrt{k^2 + 2} - k, \frac{(-1)^k}{k} \right), \quad x_k = \left( \frac{\text{sen } k}{k}, k(e^{1/k} - 1) \right).$$

- 8.- Para cada uno de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ , se pide hallar su frontera y decidir si es abierto o cerrado.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}.$$

9.- Determinar el cierre, el interior y la frontera de los siguientes conjuntos:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| < 1\}, \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

10.- (a) Sea  $A$  el conjunto de  $\mathbb{R}^2$  formado por la unión del segmento horizontal  $I_0 = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$  y los segmentos verticales cerrados  $I_n$  de altura 1 y de extremo inferior  $P_n = (1/n, 0)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Demostrar que  $A$  no es cerrado (Indicación: falta el segmento vertical en  $x = 0$ ).

(b) Sea

$$B = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}.$$

Demostrar que  $B$  no es cerrado. (Indicación: utilizar la caracterización de cerrados por medio de sucesiones).

11.- Demostrar que la unión arbitraria de abiertos es abierta. Mediante un ejemplo, comprobar que aunque sea abierto cada  $A_i$  de una familia infinita  $\{A_i\}_i$ , la intersección  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  no es necesariamente un conjunto abierto. ¿Qué ocurre con las familias de conjuntos cerrados?

12.- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son compactos? Razonar la respuesta.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}.$$

13.- Decimos que  $x$  es un *punto de acumulación* de  $E \subset \mathbb{R}^n$  si toda bola abierta de centro  $x$  contiene un punto de  $E$  distinto de  $x$ . Escribimos  $E'$  para denotar al conjunto de puntos de acumulación de  $E$ .

(a) Dado el subconjunto de  $\mathbb{R}$  definido por  $A = \left\{ \frac{1}{k} : k = 1, 2, \dots \right\}$ , hallar  $A'$ . Lo mismo para  $A = \mathbb{Q}$ .

(b) Determinar los conjuntos  $A'$  y  $\bar{A}$  para  $A = \{(0, 2)\} \cup ([0, 1] \times [0, 1]) \subset \mathbb{R}^2$ .

(c) Probar que un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.

(d) Probar que  $\bar{E} = E \cup E'$ .

14.- Probar que  $\mathbb{R}^2$  es completo (es decir, que toda sucesión de Cauchy es convergente), siguiendo los pasos indicados. (Este razonamiento se puede generalizar a  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ .)

(a) Probar que  $\max\{|a|, |b|\} \leq \|(a, b)\| \leq \sqrt{2} \max\{|a|, |b|\}$ .

(b) Sea  $\{v_n\}_k$  una sucesión en  $\mathbb{R}^2$  tal que  $v_n = (a_n, b_n)$ . Probar que  $\{v_n\}_n$  es de Cauchy si y sólo si las sucesiones de números reales  $\{a_n\}_n$ ,  $\{b_n\}_n$  son sucesiones de Cauchy en  $\mathbb{R}$ .

(c) Usando que  $\mathbb{R}$  es completo, concluir que  $\mathbb{R}^2$  es completo.