

Hoja 7: Series

1.- Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(1) $\sum \frac{10^k}{k!}$

(2) $\sum \frac{1}{k 2^k}$

(3) $\sum \frac{1}{k^k}$

(4) $\sum \left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$

(5) $\sum \frac{n!}{100^n}$

(6) $\sum \frac{(\log k)^2}{k}$

(7) $\sum \frac{(\log k)^2}{k^2}$

(8) $\sum \frac{k^2 + 2}{2k^3 + 6k - 20}$

(9) $\sum k \left(\frac{2}{3}\right)^k$

(10) $\sum \frac{1}{1 + \sqrt{k}}$

(11) $\sum \frac{2k + \sqrt{k}}{k^3 + 2\sqrt{k}}$

(12) $\sum \frac{k!}{10^{4k}}$

(13) $\sum \frac{k^2}{e^k + 1}$

(14) $\sum \frac{2^k k!}{k^k}$

(15) $\sum \frac{n!}{(n+2)!}$

(16) $\sum \frac{1}{n (\log n)^{\frac{1}{2}}}$

(17) $\sum \frac{1}{n \log n (\log(\log n))^{\frac{3}{2}}}$

(18) $\sum \frac{1}{\sqrt{k^3 - 2}}$

(19) $\sum \left(\frac{k}{k+10}\right)^k$

(20) $\sum \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

(21) $\sum \frac{45}{1 + 100^{-n}}$

(22) $\sum \frac{n!}{n^n}$

(23) $\sum \frac{\log n}{n^2}$

(24) $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$

(25) $\sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(26) $\sum (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

(27) $\sum \frac{1}{2^{\log n}}$

2.- Describir la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n},$$

según los valores de $a > 0$.

3.- Una oruga avanza por una cuerda elástica de 100 metros de largo a una velocidad de 1 m/h. Cada hora, alguien estira 100 metros la cuerda de forma homogénea. ¿Llegará alguna vez la oruga al final de la cuerda?

4.- Dos locomotoras se desplazan en línea recta, en sentido contrario, a 30 km/h partiendo de dos puntos a una distancia de 180 km. Una paloma sale de uno de los puntos a 60 km/h en dirección a la locomotora que viene en sentido opuesto. Cuando llega a la misma, gira y se dirige hacia la otra locomotora, y va repitiendo el proceso indefinidamente. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido hasta el fatal desenlace? ¿Cuántos en cada sentido?

5.- Calcular las siguientes sumas:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right), \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+1)(n+2)}.$$

6.- Decidir razonadamente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

(a) Si $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente.

(b) Si para todo n , $a_n > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente.

(c) Si para todo n , $a_n \geq a_{n+1} > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n a_n$ es convergente.

(d) Existe una sucesión $\{a_n\}$ tal que para todo n , $a_n \geq a_{n+1} > 0$, $\lim a_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n a_n$ es convergente.

7.- Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n}$$

es convergente pero no absolutamente convergente.

8.- Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^k}{3^k k!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k \log k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$