

Hoja 6: Integrales

1.- Calcular, aplicando directamente la definición, $\int_0^2 x dx$.

2.- Probar que la función $y = [x]$ es integrable en $[0, 5]$ y calcular $\int_0^5 [x] dx$.

3.- Expresar como integrales los siguientes límites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+k}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)k}{n^3}.$$

4.- Sea f una función continua en $[a, b]$, no negativa, y que cumple $\int_a^b f(x) dx = 0$. Probar que f es cero en todos los puntos.

5.- Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo $[a, b]$, no integrable, y tal que f^2 sea integrable.

6.- Demostrar que, para cada $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, se tiene:

$$\int_a^b f(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx, \quad \int_a^b f(cx) dx = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x) dx.$$

7.- Sea una función continua en $[a, b]$. Definimos la *media* o *valor esperado* de f sobre $[a, b]$ como

$$E(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

(a) Sean M y m respectivamente el máximo y el mínimo de f sobre $[a, b]$. Demostrar que $m \leq E(f) \leq M$. Si f es constante, ¿cuál es su valor esperado?

(b) Usando el teorema de los valores intermedios y el apartado anterior probar el siguiente resultado:

Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$

(c) Supongamos que f es impar (es decir, $f(x) = -f(-x)$). Hallar $E(f)$ sobre $[-a, a]$. Sugerencia: interpretar la integral en términos de áreas.

(d) Evaluar $\int_{-a}^a x^7 \sin(x^4) dx$.

8.- Sabiendo que $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$ para todo $a > 0$, calcular $\int_0^a \sqrt{x} dx$.

9.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ x + 1 & \text{si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Definimos F con $F(0) = 0$ y $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, si $x \in (0, 2]$. Determinar F de forma explícita y probar que es continua en el intervalo $[0, 2]$, aunque f no lo sea.

10.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^{x^2} (\operatorname{sen} t^2) \log(1 + t^2) dt, \quad G(x) = \int_{-e^x}^{\operatorname{sen}^2 x} \cos(\log(2t^2)) dt.$$

11.- Encontrar una función f definida y continua en $[0, \infty)$ tal que

$$\int_0^{x^2} (1 + t) f(t) dt = 6x^4.$$

12.- Sea $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ x + a & \text{si } 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

¿Qué valor debemos dar a a para que exista una función F en $[0, 4]$ con $F'(x) = f(x)$? Encontrar todas las funciones F posibles que cumplan la condición anterior.

13.- Evaluar las siguientes integrales indefinidas:

- | | | |
|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| (1) $\int (6x^2 - 8)^{25} x dx$ | (2) $\int \frac{dx}{2x^2 + 8}$ | (3) $\int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 2} dx$ |
| (4) $\int \frac{e^x}{2e^x - 1} dx$ | (5) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 8} dx$ | (6) $\int \frac{x^4}{x^2 + 4} dx$ |
| (7) $\int x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$ | (8) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ | (9) $\int x^2 \sqrt{1 + x} dx$ |
| (10) $\int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 5}$ | (11) $\int \frac{x^3}{x^3 - 3x + 2} dx$ | (12) $\int \frac{x}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx$ |
| (13) $\int \frac{e^x + 3e^{-x}}{e^{2x} + 1} dx$ | (14) $\int \frac{dx}{2 + 3 \cos x}$ | (15) $\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$ |
| (16) $\int \frac{x}{(x^2 - 1)^2} dx$ | (17) $\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}$ | (18) $\int \frac{x^5 + 2x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$ |
| (19) $\int \frac{dx}{(x - 1)^2(x^2 + 3)}$ | (20) $\int \frac{x}{1 + x^4} dx$ | (21) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$ |
| (22) $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$ | (23) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x}$ | (24) $\int \frac{dx}{\cos x}$ |
| (25) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ | (26) $\int \log x dx$ | (27) $\int x \log x dx$ |
| (28) $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$ | (29) $\int x^3 e^{-2x} dx$ | (30) $\int \cos(2x) e^{3x} dx$ |
| (31) $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^6 x dx$ | (32) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^6 x dx$ | (33) $\int \operatorname{sen}(2x) \cos(5x) dx$ |
| (34) $\int \arctan x dx$ | (35) $\int \left(\frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{1 - x^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx$ | (36) $\int x^2 \operatorname{arc} \cos x dx$ |

14.-

- (a) Hallar $\int \tan x dx$, $\int \tan^2 x dx$. Calcular $\int \tan^n x dx$, expresando esta integral en términos de $\int \tan^{n-2} x dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \tan^{10} x dx$ y para $\int \tan^{13} x dx$.
- (b) Hallar $\int \sec^2 x dx$, $\int \sec^3 x dx$. Calcular $\int \sec^n x dx$, expresando esta integral en términos de $\int \sec^{n-2} x dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \sec^{14} x dx$ y para $\int \sec^9 x dx$.

15.- Calcular los siguientes límites expresándolos como límites de sumas de Riemann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^r + 2^r + \cdots + n^r}{n^{r+1}}, \quad r > 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}} \right).$$

16.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y en caso afirmativo calcular su valor:

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx \quad (2) \int_2^{\infty} \frac{x}{x^2 - x - 2} dx \quad (3) \int_0^1 \log x dx \quad (4) \int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$$
$$(5) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log^2 x} \quad (6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{4+x^2} dx \quad (7) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (8) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

17.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$(1) \int_1^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2) \int_0^{\infty} \frac{dx}{2x + (x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (3) \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}} dx$$
$$(4) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(-\log x)^{\alpha} x}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\cosh x} dx \quad (6) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

18.-

- (a) Demostrar la fórmula de reducción $\int x^{\alpha} e^{\beta x} dx = \frac{1}{\beta} x^{\alpha} e^{\beta x} - \frac{\alpha}{\beta} \int x^{\alpha-1} e^{\beta x} dx$, para $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$.
- (b) La función Γ se define para $x > 0$ como $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Demostrar que se tiene $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. Deducir entonces que $\Gamma(n+1) = n!$.

19.-

- (a) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x e^{-x}$, $y = x^2 e^{-x}$ para valores de $x \geq 1$.
- (b) Hallar el área limitada por la curva $y = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}}$, su asíntota vertical y los ejes de coordenadas.