

Hoja 4: Límites y derivadas

1.- Sea f tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e.$$

2.- Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 x}{x^4 + x^3}$	(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2 \operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x}$	(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{3 \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^5 x}$
(d) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$	(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{[x]}}$	(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^4 + x^2 + 1)}{\log(x^{10} + x^7 + 100)}$
(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{2x-1}$	(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + x 2^x}{2 + x 3^x} \right)^{\frac{1}{x}}$	(i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^5 - 2x^4 + 3)^{\frac{-2}{(x-1)^3}}$
(j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} x ^{\frac{1}{\log x}}$	(k) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^5 - 2x^4 + 3)^{\frac{-2}{(x-1)^3}}$	(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} (7x + 5x^4)^{\frac{1}{6+2 \log(2x+1)}}$

3.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $y = \log \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$	(b) $y = \operatorname{sen}(\log x)$	(c) $y = \log(x^2 \log^3 x)$
(d) $y = x^{\tan(2\pi x)}$	(e) $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{x^2 - 1}$	(f) $y = \operatorname{arctan} \sqrt{x^2 - 1}$
(g) $y = x^{x^{\cos x}}$	(h) $y = x^{\log x}$	(i) $y = (\log x)^x$
(j) $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$	(k) $y = \tan(x^2 + \log x + \operatorname{arctan} x)$	(l) $y = 2^{\sec(x^3 + 7x - 10)}$
(m) $y = \sec(\operatorname{cosec} x)$	(n) $y = (x^2 + 1)^{e^x}$	(ñ) $y = \sqrt[5]{\cotan^8(x^2)}$
(o) $y = x^{\frac{1}{x}}$	(p) $y = \log_x e^x$	(q) $y = e^{e^x}$

4.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones. Calcular la derivada en los puntos que exista.

(a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	(b) $f(x) = \operatorname{arc} \cos x$	(c) $f(x) = \frac{x^3}{ x }$
(d) $f(x) = 2^{-\frac{1}{ x }}$	(e) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$	(f) $f(x) = \log x $
(g) $f(x) = \log \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$	(h) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$	(i) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

5.- Hallar el valor de los parámetros para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2, \\ a \cdot x + b & \text{si } x > 2. \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} a + b \cdot x^2 & \text{si } |x| \leq 2, \\ \frac{1}{|x|} & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} a \cdot \cos x & \text{si } x \leq 0, \\ b - x^2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ c \cdot \arctan x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) + a & \text{si } x \leq 0, \\ a + b \cdot x & \text{si } 0 < x < 2, \\ c \cdot e^{x^2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

6.- Probar que si $y = f(x)$ es derivable en $x = a$ y $f(a) \neq 0$ entonces $y = |f(x)|$ es derivable en $x = a$.

7.- ¿Cuántas derivadas sucesivas existen para la función $f(x) = |x|^3$? Calcularlas. Hacer lo mismo con $g(x) = x|x|$.

8.- Sean I un intervalo abierto y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ un función derivable en cierto $a \in I$. Definimos $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Probar que $t(x)$ es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, es decir, demostrar:

$$(I) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0.$$

$$(II) \text{ Si } l(x) = m \cdot x + n \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - l(x)}{x - a} = 0, \text{ entonces } l(x) = t(x).$$

9.- Calcular el valor máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

10.- Dados $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, encontrar el mínimo valor de la función

$$F(x) = \left(\sum_{k=1}^n (x - a_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

11.- Encontrar justificadamente el valor máximo de las siguientes funciones $F(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}$ y $G(x) = \frac{1}{1+|x-1|} + \frac{1}{1+|x+1|}$.

12.- Demostrar que de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

13.- Una empresa de tomate frito quiere fabricar latas cilíndricas de volumen fijo V . ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base R y la altura de la lata h , para que su construcción requiera el mínimo gasto de material?

14.- Se dice que una función f definida en un intervalo I es Lipschitz si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x, y \in I$, se verifica $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$. En general, se dice que es Hölder continua de orden $\beta > 0$ si $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\beta$.

(a) Probar que una función Hölder continua es continua.

(b) Probar que si f es Hölder continua de orden β , $\beta > 1$, entonces f es derivable. Mostrar de hecho que f debe ser constante.

15.- Obtener las siguientes desigualdades usando el Teorema del valor medio:

(a) $1 + x \leq e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\log(1 + x) < x$, para todo $x > 0$.

16.- Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, tiene a lo sumo una solución en $[-1, 1]$. ¿Para qué valores de k existe efectivamente la solución?

17.- Demostrar que la ecuación $6x^4 - 7x + 1 = 0$ no tiene más de dos raíces reales distintas.

18.- Demostrar que la ecuación $6x^5 + 13x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.