Análisis I — Curso 2012-2013.

Primero de Físicas

Hoja 3: Límites y continuidad de funciones

1.- Utilizando la formulación en términos de ε y δ demostrar:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2\,x}{3+x}=\frac{1}{2}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{|x|}=0$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\,\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0$.

2.- Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\tan x)}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x^2}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,(3+\operatorname{sen}x)}{(x+\operatorname{sen}x)^2}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x^2}{2\,x^2}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x}}{x}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-x+1}{\sqrt{x}+x-1}$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+4}}{x^2+4\,x+3}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x}{x}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x^2-4}$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{4}\left[\frac{3}{x}\right]$ (ñ) $\displaystyle\lim_{x\to 1}x\left[\frac{3}{x}\right]$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{[x]}$ (p) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}\right|^3+x^6-1\right)^{[x]}$ (q) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$

3.- Encontrar las constantes a y b para las cuales

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-a\,x-b)=1.$$

4.- Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

(a) Si existen los límites $\lim_{x\to a}f(x)$ y $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$, entonces existe el límite $\lim_{x\to a}g(x)$.

(b) Si no existen los límites $\lim_{x\to a}f(x)$ y $\lim_{x\to a}g(x)$, entonces no existe el límite $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$.

(c) Si $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$, entonces $\lim_{x\to a}|f(x)|=|\ell|$.

5.- Dibujar la gráfica y estudiar la continuidad de las siguientes funciones donde $[x]$ denote la parte entera de x, es decir, el mayor entero menor o igual que x:

(a) $f(x)=[x]$ (b) $f(x)=x-[x]$ (c) $f(x)=\sqrt{x-[x]}$

(d) $f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}$ (e) $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ (f) $f(x)=\dfrac{1}{[\frac{1}{x}]}$

6.- Estudiar los puntos de discontinuidad y establecer en su caso el tipo de la misma para las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{x^3-8}{x^2-4}, \qquad f_2(x) = \frac{b}{x-b}, \qquad f_3(x) = x\left[\frac{1}{x}\right], \qquad f_4(x) = [\operatorname{sen} x].$$

$$f_5(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [a-1, a), \\ x+a & \text{si} \quad x \in [a, a+1]. \end{cases} \qquad f_6(x) = \begin{cases} -|\operatorname{sen} x| - 4 & \text{si} \quad x < \pi, \\ |\cos x| - 5 & \text{si} \quad x \geq \pi. \end{cases}$$

$$f_7(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ |x^2 - 5x + 4| & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases} \qquad f_8(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2+2^{\tan x}} & \text{si} \quad x \in [0,\pi],\ x \neq \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

7.- Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

(a) Si una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ alcanza un máximo y un mínimo en todo intervalo cerrado entonces es continua.

(b) Si una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ en todo intervalo $[a,b]$ entonces es continua.

(c) Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua en 0 y tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, entonces f es continua en $\mathbb{R}$.

8.- Demostrar que no existe ninguna función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que tome exactamente dos veces cada valor.

9.- Dar un ejemplo de función definida sobre todos los reales que sólo sea continua en los puntos 0 y 1.

10.- Supóngase que f y g son funciones continuas en $[a,b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún x en (a,b).

11.- Supóngase que f es una función continua en $[0,1]$ y que $f(x)$ está en $[0,1]$ para todo x. Demostrar que $f(x) = x$ para algún x en $[0,1]$.

12.- Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen solución:

$$(a) \quad x - \operatorname{sen} x - 5 = 0, \qquad (b) \quad x^7 + \frac{213}{2 + x^2 + \tan^2 x} = 12$$